PROBABILITES

(résumé du cours)

Christian MICHEL

Université Louis Pasteur Strasbourg
Département Informatique

michel@dpt-info.u-strasbg.fr

PLAN

CP1: ANALYSE COMBINATOIRE

1. INTRODUCTION

L'analyse combinatoire a pour but le dénombrement des dispositions que l'on peut former à l'aide des éléments d'un ensemble fini.

2. PAIRES

Déf

Soient 2 ensembles distincts A et B d'éléments discernables $A = (a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_\alpha)$ et $B = (b_1, b_2 \ldots, b_j, \ldots, b_\beta)$. A comporte α éléments a_i et B comporte β éléments b_j.

On appelle *paire* une disposition ordonnée de 2 éléments dont le 1er élément appartient à l'ensemble A et dont le 2ème élément appartient à l'ensemble B. Une paire est notée (a_i, b_j).

Res

Soit P le nombre de paires, alors

$P = \alpha\beta$

3. MULTIPLETS

Déf

C'est une généralisation des paires à λ ensembles distincts A, B, ..., S d'éléments discernables $A=\left(a_1,a_2,\ldots,a_{i_1},\ldots,a_\alpha\right)$, $B=\left(b_1,b_2,\ldots,b_{i_2},\ldots,b_\beta\right)$, …, et $S=\left(s_1,s_2,\ldots,s_{i_\lambda},\ldots,s_\sigma\right)$. A comporte α éléments a_{i_1}, B comporte β éléments b_{i_2}, ..., S comporte σ éléments s_{i_λ}.

On appelle *multiplet* une disposition ordonnée de λ éléments dont le 1er élément appartient à l'ensemble A, le 2ème élément appartient à l'ensemble B, ..., le λième élément appartient à l'ensemble S. Un multiplet est noté $\left(a_{i_1},b_{i_2},\ldots,s_{i_\lambda}\right)$.

Res

Soit M_λ le nombre de multiplets à λ éléments, alors

$$M_\lambda=\alpha\beta\times\ldots\times\sigma$$

4. ARRANGEMENTS AVEC REPETITIONS

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E = (a, b, \ldots, s)$.

On appelle *arrangement avec répétitions* de p éléments choisis parmi n éléments, une disposition ordonnée avec répétitions de p d'entre les n éléments: il y a p éléments au total dans un ordre déterminé, certains des éléments pouvant y figurer plusieurs fois, jusqu'à p fois.

Res

Soit $\mathcal{A}_n^p$ le nombre d'arrangements avec répétitions de p éléments parmi n, alors

$$\mathcal{A}_n^p = n^p$$

5. ARRANGEMENTS SANS REPETITION

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E=(a,b,\ldots,s)$.

On appelle *arrangement sans répétition* de p éléments choisis parmi n éléments, une disposition ordonnée sans répétition de p d'entre les n éléments.

Res

Soit A_n^p le nombre d'arrangements sans répétition de p éléments parmi n, alors

$$A_n^p=\frac{n!}{(n-p)!}$$

avec $1\leq p\leq n$

6. PERMUTATIONS SANS REPETITION

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E = (a, b, \ldots, s)$.

On appelle *permutation sans répétition* de ces n éléments, une disposition ordonnée de l'ensemble des n éléments: chacun des éléments figure dans un ordre déterminé, une fois et une seule.

Res

Soit P_n le nombre de permutations sans répétition, alors

$$P_n = n!$$

7. PERMUTATIONS AVEC REPETITIONS

Déf

Soit un ensemble E de n éléments formé de v groupes discernables d'éléments indiscernables, $E = \left(\underbrace{a,a,\ldots,a}_{\substack{\text{groupe}\,1 \\ \text{avec}\ \alpha\ \text{lettres a}}}, \underbrace{b,b,\ldots,b}_{\substack{\text{groupe}\,2 \\ \text{avec}\ \beta\ \text{lettres b}}}, \ldots, \underbrace{s,s,\ldots,s}_{\substack{\text{groupe}\,v \\ \text{avec}\ \sigma\ \text{lettres s}}} \right)$ avec $\alpha + \beta + \ldots + \sigma = n$.

On appelle *permutation avec répétitions* de ces n éléments, une disposition ordonnée de l'ensemble des n éléments: la lettre a figure α fois, ..., la lettre s figure σ fois et ceci dans un ordre déterminé.

Res

Soit P_v le nombre de permutations avec répétitions, alors

$$P_v = \frac{n!}{\alpha!\beta!\times\ldots\times\sigma!}$$

8. COMBINAISONS SANS REPETITION

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E = (a, b, \ldots, s)$.

On appelle *combinaison sans répétition* de p éléments parmi n éléments, une disposition non ordonnée sans répétition de p d'entre les n éléments.

Res

Soit C_n^p ou $\binom{n}{p}$ le nombre de combinaisons sans répétition, alors

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

avec $1 \leq p \leq n$

9. COMBINAISONS AVEC REPETITIONS

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E = (a,b,\ldots,s)$.

On appelle *combinaison avec répétitions* de p éléments parmi n éléments, une disposition non ordonnée avec répétitions de p d'entre les n éléments: il y a p éléments au total, certains des éléments pouvant y figurer plusieurs fois, jusqu'à p fois.

Res

Soit $\mathcal{C}_n^p$ le nombre de combinaisons avec répétitions, alors

$$\mathcal{C}_n^p = C_{n+p-1}^p = \frac{(n+p-1)!}{p!(n-1)!}$$

avec $n,p \geq 1$

10. PARTIES D'UN ENSEMBLE

Déf

Soit un ensemble E de n éléments discernables, $E = (a, b, \ldots, s)$. Les parties $\mathbf{P}(E)$ d'un ensemble E forment l'ensemble $\{\varnothing, a, b, \ldots, s, \{a, b\}, \ldots, \{r, s\}, \{a, b, c\}, \ldots, E\}$.

Res

Soit $\mathrm{Card}(\mathbf{P}(E))$ le nombre de parties de $\mathbf{P}(E)$ de l'ensemble E, alors

$$\mathrm{Card}(\mathbf{P}(E)) = 2^n$$

CP2: ESPACE PROBABILISE

1. ESPACE

Le calcul des probabilités intervient dans l'étude des phénomènes pour lesquels il existe des éléments d'incertitude et qui pour cette raison sont dits aléatoires. Par exemple, un jet de dé.

1.1. Expériences aléatoires et épreuves

Les phénomènes étudiés doivent être bien définis et reproductibles. Les phénomènes ayant ces caractéristiques sont appelés *expériences*. Ainsi, une expérience est définie par un certain nombre d'observations à faire dans des conditions précises. Par exemple, un jet de dé doit rebondir plusieurs fois avant qu'il ne s'immobilise.
L'expérience est dite *aléatoire* quand on ne connait pas le résultat à l'avance. Cette situation est fréquente quand on ne connait pas les causes ou les lois qui régissent l'expérience.
Après avoir défini une expérience, on peut effectuer une réalisation de cette expérience, on dit qu'on effectue une *épreuve* relative à cette expérience. Par exemple, un jet de dé.

1.2. Résultats d'une expérience et d'une épreuve

Les résultats d'une expérience sont déterminés par l'ensemble des valeurs possibles prises par les observations qui définissent l'expérience. Cet ensemble est appelé *espace* (espace fondamental) et noté Ω. Par exemple, un jet de dé: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.
L'ensemble Ω peut être fini (par exemple le dé), infini (par exemple les valeurs comprises dans un intervalle), unique (l'expérience est dite déterministe: on est sûr d'obtenir le résultat).
Le résultat d'une épreuve relative à une expérience, appelé *événement*, est un

élément de l'ensemble Ω.

1.3. Extension de la notion d'expérience

Un processus est une expérience en plusieurs étapes. Par exemple, 2 jets successifs d'un dé. Un ensemble Ω possible est le couple (i,j) signifiant que le 1er jet a donné le résultat i et le 2ème jet, le résultat j: $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(2,1),\ldots,(6,6)\}$.

1.4. Objectif du calcul des probabilités

Après avoir défini une expérience, on peut s'interroger sur les chances de voir tel ou tel événement (résultat) se produire à la suite d'une épreuve que l'on se propose d'effectuer. C'est le calcul des probabilités qui permet de déterminer les chances de voir tel ou tel événement.

2. EVENEMENT

2.1. Extension de la notion d'événement

L'événement (résultat) d'une épreuve relative à une expérience, défini comme étant un élément de l'ensemble Ω, est généralisé à un sous-ensemble quelconque (partie) A de Ω. Par exemple, l'événement "obtenir un point pair" lors du jet de dé est le sous-ensemble $A = \{2,4,6\}$ de l'ensemble $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$.

2.2. Correspondance entre le langage des événements et le langage ensembliste

EVENEMENT	ENSEMBLE
Contraire "non A" ou $\bar{A}$	A et $\bar{A}$ complémentaires: $A \cup \bar{A} = \Omega$
"A et B"	Intersection $A \cap B$
"A ou B"	Réunion $A \cup B$
Certain "Ω"	Partie pleine de Ω
Impossible "$\varnothing$"	Partie vide de Ω
Elémentaire	Sous-ensembles de Ω formés d'un unique élément
"A" incompatible avec "B" ("A et B" impossibles)	A et B disjoints: $A \cap B = \varnothing$
"A" implique "B"	Inclusion $A \subset B$

2.3. Tribu

Soient Ω l'ensemble non vide des événements, A un sous-ensemble quelconque de Ω et $\mathbf{P}(\Omega)$ l'ensemble des sous-ensembles de Ω (parties de Ω).

(i) Quand Ω est fini: On peut s'intéresser à tous les événements de $\mathbf{P}(\Omega)$. $\mathbf{P}(\Omega)$ est alors appelé tribu $\mathcal{A}$.

(ii) Quand Ω est infini: On se restreint à une classe d'événements plus petite que $\mathbf{P}(\Omega)$. Cette classe est appelée tribu $\mathcal{A}$ si elle vérifie les propriétés suivantes

$\varnothing \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$

$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite infinie (ou finie) d'événements de $\mathcal{A}$, alors les événements

$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ et $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

3. PROBABILITE D'UN EVENEMENT

Soient Ω l'ensemble non vide des événements et $\mathcal{A}$ une tribu de Ω, alors la probabilité d'un événement A, notée $P(A)$, est un nombre mesurant le pourcentage de chances qu'a l'événement A de se réaliser lors d'une épreuve relative à une expérience; cette probabilité vérifie les axiomes naturels suivants

Axiome 1

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Axiome 2

$$P(\Omega) = 1$$

Axiome 3 (additivité finie)

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ est une suite finie d'événements 2 à 2 disjoints, alors

$$P\left(\bigcup_{n \in N} A_n\right) = \sum_{n \in N} P(A_n)$$

Axiome 4 (additivité dénombrable)

Si $A_1, A_2, \ldots$ est une suite infinie d'événements 2 à 2 disjoints, alors

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

4. ESPACE PROBABILISE

Déf

Soient Ω l'ensemble non vide des événements, A une tribu de Ω et P une fonction définie sur A et vérifiant les axiomes 1, 2, 3 et 4 (cf § 3), alors le triplet (Ω, A, P) constitue un espace probabilisé. La fonction P est appelée loi de probabilités sur Ω ou sur l'espace probabilisable formé par le couple (Ω, A).

5. LOIS DE PROBABILITES

5.1. Lois de probabilités discrètes

Déf

Une loi de probabilité P sur Ω est discrète si toute la probabilité est concentrée sur une suite finie ou infinie dénombrable d'événements élémentaires.

5.1.1. Espace fini

Soient n éléments w_i de Ω, $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Un événement A étant une réunion d'événements élémentaires et 2 événements élémentaires étant disjoints, il résulte de l'axiome 3 que $P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i)$.

La loi de probabilités P est donc entièrement définie par les probabilités élémentaires $P(w_i)$ (notées également p_i) et vérifie de plus

Axiome 1

$$0 \leq P(w_i) \leq 1$$

Axiome 2

$$\sum_{i=1}^{n} P(w_i) = 1$$

5.1.2. Espace infini dénombrable

L'ensemble Ω est infini dénombrable si ses éléments peuvent être rangés en une suite infinie $w_1, w_2, \ldots$ Un événement A étant une réunion d'événements élémentaires et 2 événements élémentaires étant disjoints, il résulte de l'axiome 4

$$P(A) = \sum_{w_i \in A} P(w_i).$$

La loi de probabilités P est donc entièrement définie par les probabilités élémentaires $P(w_i)$ (notées également p_i) et vérifie de plus

Axiome 1

$$0 \leq P(w_i) \leq 1$$

Axiome 2

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(w_i) = 1$$

5.1.3. Espace quelconque

On peut considérer des lois discrètes sur un ensemble Ω quelconque. La probabilité est alors concentrée sur un sous-ensemble fini ou infini dénombrable.

5.2. Lois de probabilités continues

Déf

Une loi de probabilités P sur Ω est continue si tous les événements élémentaires ont une probabilité nulle.

6. PROBABILITE CONDITIONNELLE

6.1. Définition

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ sous-jacent à une expérience aléatoire. Pour définir la probabilité conditionnelle d'un événement A sachant que l'événement B est réalisé, notée $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$, on sait que

(i) l'ensemble des résultats possibles n'est plus Ω mais B

(ii) l'événement étudié n'est plus A mais $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

La probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ se définit donc par

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{\mathrm{P}(\mathrm{B})}$$

avec $\mathrm{P}(\mathrm{B}) \neq 0$

La probabilité conditionnelle $\mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B})$ vérifie bien les axiomes

Axiome 1

$$0 \leq \mathrm{P}(\mathrm{A}|\mathrm{B}) \leq 1$$

Axiome 2

$$\mathrm{P}(\Omega|\mathrm{B}) = 1$$

Axiome 3

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}_i | \mathrm{B}\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\mathrm{A}_i|\mathrm{B})$$

6.2. Déduction de la formule des probabilités composées

(i) Pour 2 événements A et B

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) = P(B) \times P(A|B)$$

(ii) Pour 3 événements A, B, C

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B|A) \times P(C|A \cap B)$$

(iii) Pour n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2|A_1) \times P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \ldots \times P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$$

6.3. Déduction de la formule de Bayes

(i) Pour 2 événements A et B

$$P(A|B) = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(A) \times P(B|A) + P(\bar{A}) \times P(B|\bar{A})}$$

avec $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

Dans ce contexte, on interprète l'événement A comme étant une cause possible de l'événement B. $P(A)$ est alors appelé la probabilité à priori de A et $P(A|B)$, la probabilité à postériori de A (point de vue introduit par Bayes).

(ii) Pour n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) \times P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B|A_i)}$$

avec $\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$

7. INDEPENDANCE D'EVENEMENTS

7.1. Définition de l'indépendance de 2 événements

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sous-jacent à une expérience aléatoire. 2 événements A et B sont indépendants s'ils vérifient la condition

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Si $P(A) > 0$ et $P(B) > 0$, cette condition est équivalente à l'une ou l'autre des conditions

$P(A|B) = P(A)$ et $P(B|A) = P(B)$

L'indépendance de 2 événements signifie que la réalisation de l'un des événements n'a aucune influence sur la réalisation de l'autre.

7.2. Définition de l'indépendance de plusieurs événements

Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ sous-jacent à une expérience aléatoire. n événements $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sont indépendants si tout sous-ensemble $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_j}$ de j événements parmi n, $j = 2, 3, \ldots, n$, vérifie la condition

$$P\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_j}\right) = P\left(A_{i_1}\right) \times P\left(A_{i_2}\right) \times \ldots \times P\left(A_{i_j}\right)$$

En particulier, pour $j = n$, on a

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1) \times P(A_2) \times \ldots \times P(A_n)$$

CP3: VARIABLES ALEATOIRES

1. INTRODUCTION

Dans le but d'utiliser les méthodes des mathématiques numériques, on fait correspondre à un espace probabilisable quelconque, un espace probabilisable particulier d'univers R. C'est-à-dire, une fonction X appelée variable aléatoire (réelle) (v.a.) associera un réel $X(w)$ au résultat w de l'expérience aléatoire.

2. RAPPEL: IMAGE RECIPROQUE D'UN INTERVALLE

2.1. Définition

Soit un ensemble Ω et une fonction $X : \Omega \to R$.

On appelle image réciproque d'un intervalle I de R par la fonction X, notée $X^{-1}(I)$, l'ensemble des antécédents des éléments de I par X

$X^{-1}(I) = \{w; \exists x \in I \,/\, X(w) = x\}$

Si $I = R$, $X^{-1}(I) = \Omega$ et si $I = \varnothing$, $X^{-1}(I) = \varnothing$

2.2. Notations

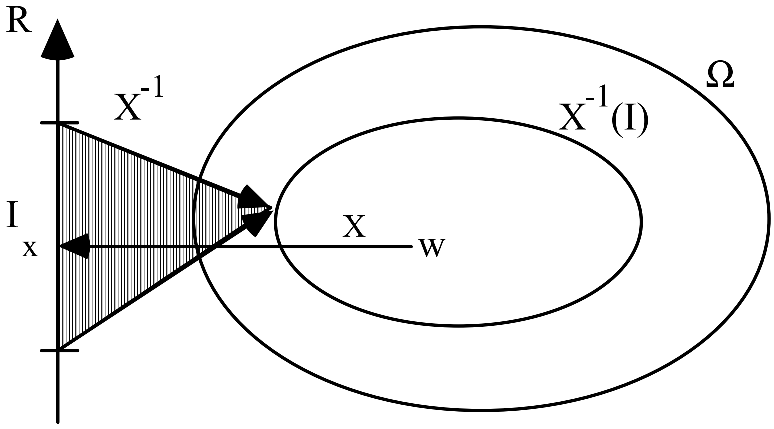
Par convention, $X(w) = X$

$X^{-1}(]x,y]) = (x < X \le y)$

$X^{-1}(]-\infty,x]) = (X \le x)$

$X^{-1}(]x,\infty[) = (X > x)$

$X^{-1}(x) = (X = x)$



2.3. Image réciproque d'une réunion et d'une intersection d'intervalles

Soient $I_1, I_2, \ldots$ une suite infinie (dénombrable) d'intervalles de R, alors

$$X^{-1}\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} I_i\right) = \bigcup_{i=0}^{\infty} X^{-1}(I_i) \quad \text{et} \quad X^{-1}\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} I_i\right) = \bigcap_{i=0}^{\infty} X^{-1}(I_i)$$

L'image réciproque d'une réunion d'intervalles est la réunion des images réciproques des intervalles. L'image réciproque d'une intersection d'intervalles est l'intersection des images réciproques des intervalles.

3. VARIABLE ALEATOIRE

3.1. Définition

Soit un espace probabilisable (Ω, A) et une fonction $X : (\Omega, A) \to R$.

X est une variable aléatoire (réelle) (v.a.) si pour tout intervalle I de R, l'image réciproque de l'intervalle appartient à la tribu

$\forall I \in R, X^{-1}(I) \in A$.

3.2. Variable aléatoire discrète

X est une v.a. discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable.

3.3. Variable aléatoire continue

X est une v.a. continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle de R non réduit à un point.

3.4. Exemples

3.4.1. Variable aléatoire constante (ou certaine)

3.4.2. Variable aléatoire indicatrice (ou de Bernoulli)

3.5. Probabilité image

Etant donné un espace probabilisé (Ω, A, P) et une v.a. X sur (Ω, A), alors la fonction p définie par

$\forall I \in R, p(I) = P\left(X^{-1}(I)\right)$

est une probabilité. p est appelée probabilité image de P (avec P défini au § 3 de CP2).

La probabilité image p vérifie les axiomes de probabilité

Axiome 1

$$0 \leq p(I) \leq 1$$

Axiome 2

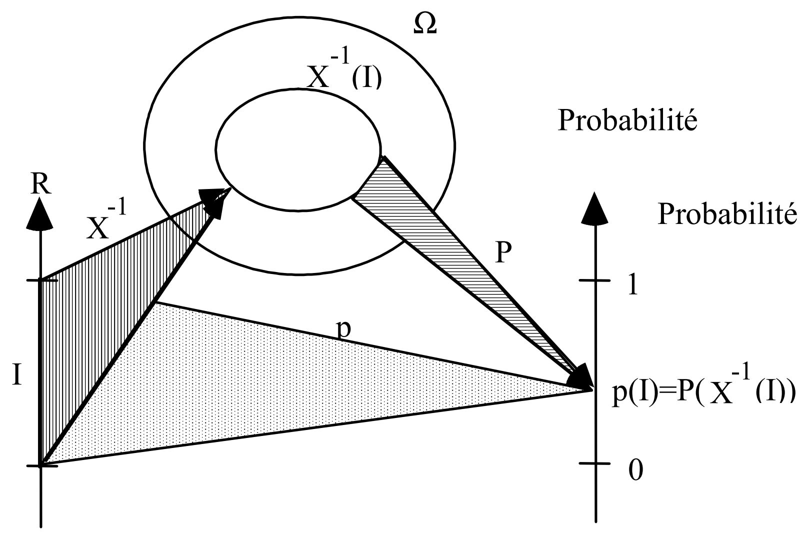
$$p(R) = 1$$

Axiomes 3 et 4

$$p\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} I_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} p(I_i)$$

3.6. Conclusion

La fonction $p(I)$, notée dans la suite probabilité $P(I)$, est très intéressante parce qu'elle permet des calculs de probabilités de la v.a. X sans continuer à se référer explicitement à l'espace probabilisé (Ω, A, P).



Une probabilité $P(I)$ très importante est la probabilité associée à l'intervalle $I =]-\infty, x]$, c'est-à-dire associée à l'événement $X \leq x$ ($X^{-1}(]-\infty, x]) = (X \leq x)$). La probabilité $P(X \leq x)$ est appelée fonction de répartition.

4. FONCTION DE REPARTITION D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

4.1. Définition

On appelle fonction de répartition de la v.a. X, la fonction $F:R \to R[0,1]$ telle que

$F(x) = P(X \leq x)$

Cette fonction de répartition est définie pour une v.a. discrète ou continue.

4.2. Propriétés

P1

$0 \leq F(x) \leq 1$

P2

$F(x)$ est une fonction croissante

P3

$\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$

Dém

P4

$\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$

P5

$F(x)$ est continue à D: $F(x) = F(x^{+})$

4.3. Calcul de probabilités avec la fonction de répartition

Quand la fonction de répartition $F(x)$ d'une v.a. X est connue, on peut alors déterminer la probabilité que X soit dans un certain intervalle.

P1

$P(X > x) = 1 - F(x)$

P2

$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

P3

$P(X < x)$ est continue à G: $P(X < x) = F(x^-)$

P4

$P(X = x) = F(x^+) - F(x^-)$

Conséquences importantes de la propriété P4: v.a. continues et v.a. discrètes

(i) Si F est continue en x, alors $F(x^+) = F(x^-) = F(x)$ et donc $P(X = x) = 0$

La probabilité attachée à un point d'une v.a. continue est nulle.

(ii) Si F n'est pas continue en x, alors $F(x^+) > F(x^-)$ et donc $P(X = x) > 0$

La probabilité attachée à un point d'une v.a. discrète est non nulle.

4.4. Exemple d'une fonction de répartition

4.5. Fonction de répartition et loi de probabilités d'une variable aléatoire discrète

4.5.1. Probabilités attachées à un point et à un intervalle d'une variable aléatoire discrète

4.5.1.1. Rappel de la définition d'une variable aléatoire discrète

X est une v.a. discrète si l'ensemble $X(\Omega)$ est fini ou infini dénombrable, c'est-à-dire si les différentes valeurs x de X sont en nombre fini ou infini dénombrable.
On indicera les valeurs x en cas de nécessité.

4.5.1.2. Probabilité attachée à un point d'une variable aléatoire discrète

D'après la propriété P4 du § 4.3 de CP3

$$P(X=x)=F(x^+)-F(x^-)>0$$

La probabilité attachée à un point d'une v.a. discrète est non nulle.

4.5.1.3. Probabilité attachée à un intervalle d'une variable aléatoire discrète

D'après la propriété P3 du § 4.3 de CP3

$$P(x_i<X<x_{i+1})=P(X<x_{i+1})-P(X\le x_i)=F(x_{i+1}^-)-F(x_i)=F(x_i)-F(x_i)=0$$

La probabilité attachée à un intervalle d'une v.a. discrète est nulle.

4.5.2. Fonction de répartition

La fonction de répartition $F(x)=P(X\le x)$ vérifie les propriétés P1, P2, P3, P4 et P5 du § 4.2 de CP3 et est en escalier d'après les § 4.5.1.2 et 4.5.1.3 de CP3.

4.5.3. Loi de probabilités

$P(X = x)$ est appelée loi de probabilités et vérifie les axiomes, en particulier

Axiome 1

$0 \leq P(X = x) \leq 1$

Axiome 2

$\sum_{x} P(X = x) = 1$

4.5.4. Relation entre la fonction de répartition et la loi de probabilités

$F(x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$

4.5.5. Distribution d'une variable aléatoire discrète

La distribution d'une v.a. discrète peut être représentée de façon équivalente par sa loi de probabilités $P(X = x)$ ou par sa fonction de répartition $F(x) = P(X \leq x)$.

4.6. Fonction de répartition et densité de probabilités d'une variable aléatoire continue

4.6.1. Probabilités attachées à un point et à un intervalle d'une variable aléatoire continue

4.6.1.1. Rappel de la définition d'une variable aléatoire continue

X est une v.a. continue si l'ensemble $X(\Omega)$ est un intervalle de R non réduit à un point.

4.6.1.2. Probabilité attachée à un point d'une variable aléatoire continue

D'après la propriété P4 du § 4.3 de CP3

$$P(X = x) = F(x^+) - F(x^-) = 0$$

La probabilité attachée à un point d'une v.a. continue est nulle.

4.6.1.3. Probabilité attachée à un intervalle d'une variable aléatoire continue

D'après le § 4.6.1.2, les probabilités attachées à un intervalle fermé $[a,b]$, semi-ouvert $]a,b]$ ou $[a,b[$, ouvert $]a,b[$ sont égales. D'après la propriété P2 du § 4.3 de CP3

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b) = P(a \le X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)$$

La probabilité attachée à un intervalle d'une v.a. continue est égale à la différence des valeurs prises par la fonction de répartition aux extrémités de l'intervalle.

4.6.2. Fonction de répartition

La fonction de répartition $F(x) = P(X \le x)$ vérifie les propriétés P1, P2, P3, P4 et P5 du § 4.2 de CP3 et est sans saut d'après les § 4.5.1.2 et 4.5.1.3 de CP3.

4.6.3. Densité de probabilités

Dans le cas discret, la probabilité attachée à un point est étudiée avec la loi de probabilités. Dans le cas continu, cette probabilité est nulle mais on peut se rapprocher du cas discret en étudiant un intervalle $[a,b]$ infinitésimal. La probabilité attachée à un intervalle infinitésimal est égale à $F(b)-F(a)=d\left[F(x)\right]$, c'est-à-dire égale à la différentielle de $F(x)$. Or, $d\left[F(x)\right]=F'(x)dx$. Ainsi, la distribution d'une v.a. continue peut être également étudiée avec la dérivée $F'(x)$ de la fonction de répartition $F(x)$. $F'(x)$ est notée $f(x)$ et est appelée densité de probabilités.

P1

$$F'(x)=f(x)\Leftrightarrow F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

P2

$$f(x)\geq 0$$

P3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$$

P4

$$P(a\leq X\leq b)=F(b)-F(a)=\int_{a}^{b}f(x)dx$$

4.6.4. Relation entre la fonction de répartition et la densité de probabilités

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

4.6.5. Distribution d'une v.a. continue

La distribution d'une v.a. continue peut être représentée de façon équivalente par sa densité de probabilités $f(x)$ ou par sa fonction de répartition $F(x)=P(X\leq x)$

5. ESPERANCE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

5.1. Définition

L'espérance (ou moyenne) est la caractéristique de tendance centrale la plus importante pour une v.a. (la médiane et le mode sont 2 autres caractéristique de tendance centrale).

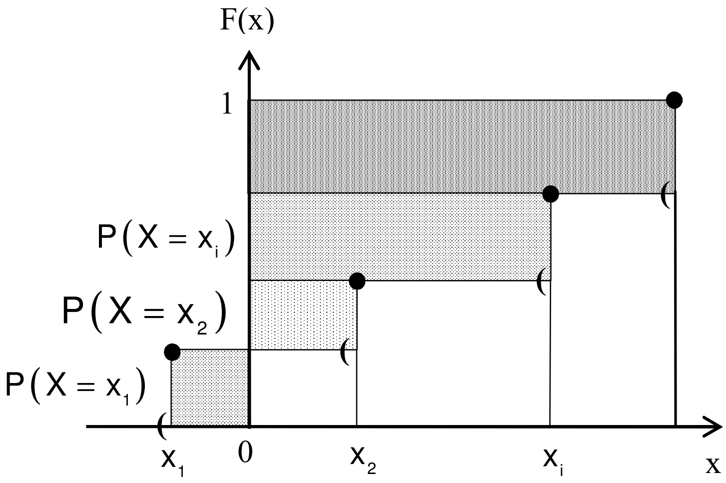
L'espérance d'une v.a. X est un nombre noté $E(X)$ qui est définie pour une v.a. discrète et pour une v.a. continue.

5.1.1. Espérance d'une v.a. discrète

$$E(X)=\sum_{x} xP(X=x)$$

$E(X)$ peut ne pas exister (si la série n'est pas convergente).

Interprétation graphique de $E(X)$ avec $F(x)$

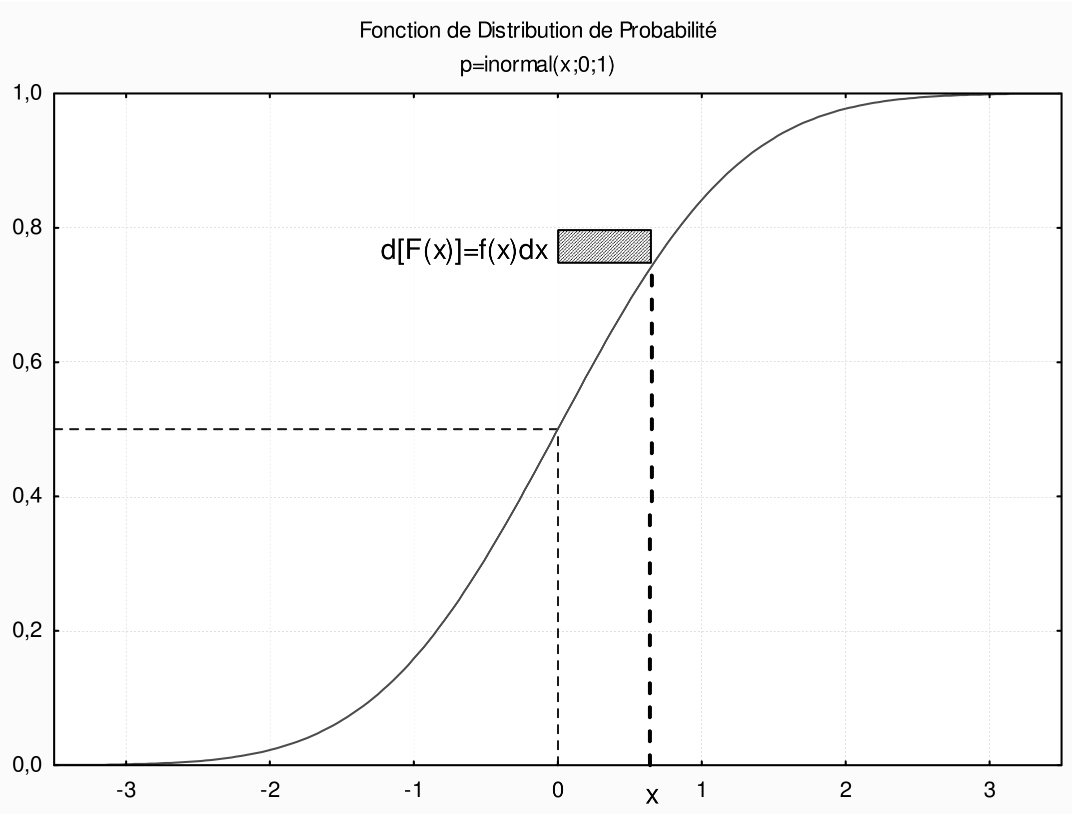


5.1.2. Espérance d'une v.a. continue

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

$E(X)$ peut ne pas exister (si l'intégrale n'est pas convergente).

Interprétation graphique de $E(X)$ avec $F(x)$



5.2. Propriétés

P1

Soient une v.a. X et 2 constantes a et b, alors

$$E(aX+b)=aE(X)+b$$

P2

Soit a une constante, alors

$$E(a)=a$$

P3

Si il existe une constante a telle que $P(X \geq a)=1$, alors

$$E(X) \geq a$$

P4

Si il existe une constante b telle que $P(X \leq b) = 1$, alors

$E(X) \leq b$

P5

Si il existe 2 constantes a et b telles que $P(a \leq X \leq b) = 1$, alors

$a \leq E(X) \leq b$

P6

Si $P(X \geq a) = 1$ et $E(X) = a$, alors

$P(X = a) = 1 \text{ et } P(X > a) = 0$ ou $P(X = E(X)) = 1 \text{ et } P(X > E(X)) = 0$

6. VARIANCE ET ECART-TYPE D'UNE VARIABLE ALEATOIRE

6.1. Définition

La variance est la caractéristique de dispersion la plus importante pour une v.a. (l'étendue et l'écart-moyen sont 2 autres caractéristiques de dispersion).

La variance d'une v.a. X est un nombre noté $V(X)$ égale à

$$V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = E\left(X^2\right) - E(X)^2$$

L'écart-type d'une v.a. X est un nombre noté $\sigma(X)$ égal à

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$V(X)$ est la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

Interprétation de $V(X)$. La variance peut être interprétée comme le moment d'inertie d'un ensemble de points autour du centre de gravité $E(X)$.

6.1.1. Variance d'une v.a. discrète

$$V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = \sum_x \left(x - E(X)\right)^2 P(X = x)$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \sum_x x^2 P(X = x) - E(X)^2$$

6.1.2. Variance d'une v.a. continue

$$V(X) = E\left(\left[X - E(X)\right]^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,dx$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,dx - E(X)^2$$

6.1.3. Remarque sur le calcul de la variance

En général, il est plus simple et plus rapide de calculer la variance avec la formule $V(X)=E(X^2)-E(X)^2$, que ce soit avec une v.a. discrète ou continue.

6.2. Propriétés

Les propriétés de la variance se démontrent à l'aide des propriétés de l'espérance.

P1

$V(X)\geq 0$

P2

Soient une v.a. X et deux constantes a et b, alors

$V(aX+b)=a^2V(X)$

P3

Soit a une constante, alors

$V(a)=0$

P4

Soit une v.a. X, alors

$V(-X)=V(X)$

P5

Si $P(X=a)=1$ alors

$V(X)=0$

7. VARIABLE ALEATOIRE A PLUSIEURS DIMENSIONS

7.1. Définition

On généralise les définitions et les résultats précédents au cas d'une v.a. à n dimensions (vecteur aléatoire à n composantes ou n v.a.).

Soit un espace probabilisable $(\Omega,\mathcal{A})$ et une fonction $X:(\Omega,\mathcal{A}) \to R^n$. X est une variable aléatoire (réelle) (v.a.) à n dimensions si pour tout intervalle I de R^n, l'image réciproque de l'intervalle appartient à la tribu

$\forall I \in R^n,\ X^{-1}(I) \in \mathcal{A}$

avec $X^{-1}(I) = \{w; \exists\, x_1 \in I_1,\ldots,\exists\, x_i \in I_i,\ldots,\exists\, x_n \in I_n\ /$

$$X_1(w) = x_1,\ldots,X_i(w) = x_i,\ldots,X_n(w) = x_n\}$$

Rem

$X(w)$ est le vecteur $(X_1(w),\ldots,X_i(w),\ldots,X_n(w))$ et I est le vecteur $(I_1,\ldots,I_i,\ldots,I_n)$.

7.2. Fonction de répartition d'une variable aléatoire à plusieurs dimensions

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= P(\{X_1 \le x_1\} \cap \ldots \cap \{X_i \le x_i\} \cap \ldots \cap \{X_n \le x_n\}) \\ &= P(X_1 \le x_1,\ldots,X_i \le x_i,\ldots,X_n \le x_n) \end{aligned}$$

P1

$0 \le F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \le 1$

P2

$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ est une fonction croissante par rapport à chacune des variables x_i.

P3

$$\lim_{\substack{x_i \to \infty \\ i=1,\dots,n}} F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = 1$$

P4

$$\lim_{\substack{x_i \to -\infty \\ i=1,\dots,n}} F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = 0$$

P5

$F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$ est continue à D: $F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = F(x_1^+,\dots,x_i^+,\dots,x_n^+)$

7.3. Loi de probabilités d'une variable aléatoire discrète à plusieurs dimensions

$P(X_1 = x_1,\dots,X_i = x_i,\dots,X_n = x_n)$ est appelée loi de probabilités et vérifie en particulier

Axiome 1

$$0 \le P(X_1 = x_1,\dots,X_i = x_i,\dots,X_n = x_n) \le 1$$

Axiome 2

$$\sum_{x_1} \dots \sum_{x_i} \dots \sum_{x_n} P(X_1 = x_1,\dots,X_i = x_i,\dots,X_n = x_n) = 1$$

$$F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n) = \sum_{x_{1_j} \le x_1} \dots \sum_{x_{i_j} \le x_i} \dots \sum_{x_{n_j} \le x_n} P\left(X_1 = x_{1_j},\dots,X_i = x_{i_j},\dots,X_n = x_{n_j}\right)$$

7.4. Densité de probabilités d'une variable aléatoire continue à plusieurs dimensions

$$F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\dots\int_{-\infty}^{x_i}\dots\int_{-\infty}^{x_n} f(t_1,\dots,t_i,\dots,t_n)\,dt_1\dots dt_i\dots dt_n$$

P1

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)=\frac{\partial^n F(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)}{\partial x_1\dots\partial x_i\dots\partial x_n}$$

(différentielle d'une fonction à plusieurs variables)

On est donc amené à rechercher le jacobien, c'est-à-dire le déterminant de la matrice de changement de variables.

P2

$$f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\geq 0$$

P3

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty}\dots\int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_i\dots dx_n=1$$

P4

$$P(a_1\leq X_1\leq b_1,\dots,a_i\leq X_i\leq b_i,\dots,a_n\leq X_n\leq b_n)$$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\dots\int_{a_i}^{b_i}\dots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_i\dots dx_n$$

7.5. Variables aléatoires indépendantes

7.5.1. Définition

Les v.a. $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont indépendantes si

$$\begin{aligned} F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) &= P(X_1 \le x_1,\ldots,X_i \le x_i,\ldots,X_n \le x_n) \\ &= P(X_1 \le x_1)\times\ldots\times P(X_i \le x_i)\times\ldots\times P(X_n \le x_n) \\ &= F(x_1)\times\ldots\times F(x_i)\times\ldots\times F(x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) \end{aligned}$$

La fonction de répartition de n v.a. (v.a. à n dimensions) est égale au produit des fonctions de répartition marginales.

7.5.2. Variable aléatoires discrètes indépendantes

D'après la définition

$$P(X_1 = x_1,\ldots,X_i = x_i,\ldots,X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i)$$

$$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \le x_i) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

7.5.3. Variable aléatoires continues indépendantes

D'après la définition

$$F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f(t_i)\,dt_i = \prod_{i=1}^{n} F(x_i)$$

$$f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i)$$

7.6. Espérance de plusieurs variables aléatoires

P1

Si $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont n v.a., alors

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

P2

Si $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont n v.a., $a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n$ et b, des constantes, alors

$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i) + b$$

P3

Si $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont n v.a. indépendantes, alors

$$E\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

P4: Définition de la covariance de 2 v.a.

$$\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2)$$

P5

Si X_1 et X_2 sont indépendants, alors

$E(X_1X_2) = E(X_1)E(X_2)$ et $\mathrm{Cov}(X_1,X_2) = 0$

7.7. Variance de plusieurs variables aléatoires

Les propriétés de la variance se démontrent à l'aide des propriétés de l'espérance.

P1

Si $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont n v.a. indépendantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$$

P2

Si $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ sont n v.a. indépendantes, $a_1,\ldots,a_i,\ldots,a_n$ et b des constantes, alors

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 V(X_i)$$

P3

Si X_1 et X_2 sont 2 v.a. indépendantes telles que $E(X_1) = E(X_2)$, alors

$$E\left([X_1 - X_2]^2\right) = V(X_1) + V(X_2)$$

8. FONCTION GENERATRICE DES MOMENTS

8.1. Définition

Soit X une v.a. et pour tout nombre réel t, on définit la fonction génératrice des moments $\Psi_X(t)$ telle que

$$\Psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right)$$

$E(X)$ peut ne pas exister (cf § 5.1) donc $\Psi_X(t)$ peut ne pas exister.

8.1.1. Fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire discrète

$$\Psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \sum_x e^{tx} P(X = x)$$

8.1.2. Fonction génératrice des moments pour une variable aléatoire continue

$$\Psi_X(t) = E\left(e^{tX}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)\, dx$$

8.2. Propriétés

P1

$$\Psi_X^{(n)}(0) = E\left(X^n\right)$$

Conséquences importantes

$$\Psi_X'(0) = E(X)$$

La dérivée première de la fonction génératrice des moments en 0 est égale à l'espérance.

$\Psi''_X(0) = E(X^2)$

La dérivée seconde de la fonction génératrice des moments en 0 est égale à $E(X^2)$.

Donc $\Psi'_X(0)$ et $\Psi''_X(0)$ permettent de calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$ d'une v.a. X.

P2

Soient X une v.a. avec une fonction génératrice des moments $\Psi_X(t)$ et a et b, 2 constantes, alors

$\Psi_{aX+b}(t) = e^{bt}\Psi_X(at)$

P3

Soient $X_1,\ldots,X_i,\ldots,X_n$ n v.a. indépendantes aves des fonctions génératrices des moments $\Psi_{X_1}(t),\ldots,\Psi_{X_i}(t),\ldots,\Psi_{X_n}(t)$ respectivement, alors

$\Psi_{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod\limits_{i=1}^{n}\Psi_{X_i}(t)$

CP4: LOIS DE PROBABILITES DISCRETES USUELLES

1. LOI DE BERNOULLI $B(p)$

1.1. Définition

Soit une expérience ne possédant que 2 résultats possibles A et $\overline{A}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Soit X la v.a. qui est égale à 1 si A est réalisé, à 0 si $\overline{A}$ est réalisé

$P(X=1) = p$

$P(X=0) = q = 1 - p$

Loi de probabilités

$P(X=x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$

1.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$E(X) = p$, $V(X) = pq$, $\Psi(t) = pe^t + q$

2. LOI BINOMIALE $B(n,p)$

2.1. Définition (une généralisation de la loi de Bernoulli)

Soit une expérience ne possédant que 2 résultats possibles A et $\overline{A}$ de probabilités respectives p et $q=1-p$. Soit X la v.a. qui est égale au nombre x de réalisations de A au cours de n épreuves indépendantes (problème de tirages successifs avec remise).

La probabilité que A soit réalisé x fois, est égale p^x (évènements indépendants). $\overline{A}$ est donc réalisé $n-x$ fois. La probabilité que $\overline{A}$ soit réalisé $n-x$ fois, est égale q^{n-x} (évènements indépendants). La probabilité que $X=x$ est donc égale à $p^x q^{n-x}$ (évènements indépendants) fois le nombre de combinaisons sans répétition de x parmi n, C_n^x.

Loi de probabilités

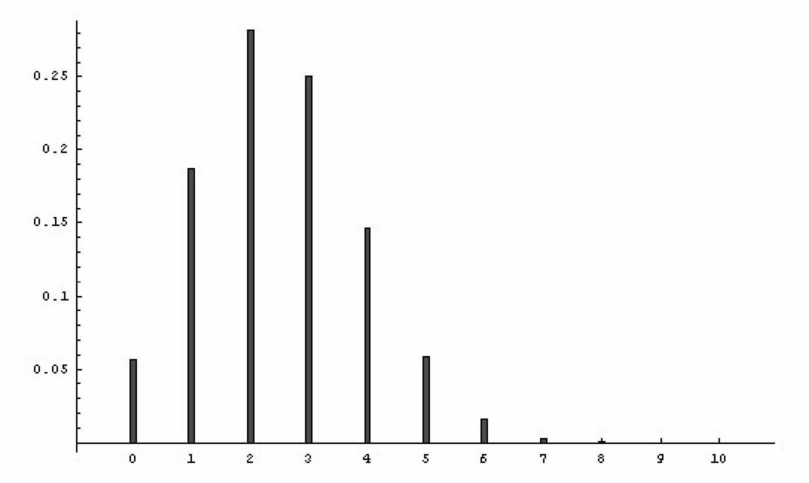
$$P(X=x)=C_n^x p^x q^{n-x} \qquad x=0,\dots,n$$

Une variable Binomiale X est une somme de n variables de Bernoulli X_i indépendantes et de même paramètre p: $X=\sum_{i=1}^{n} X_i$

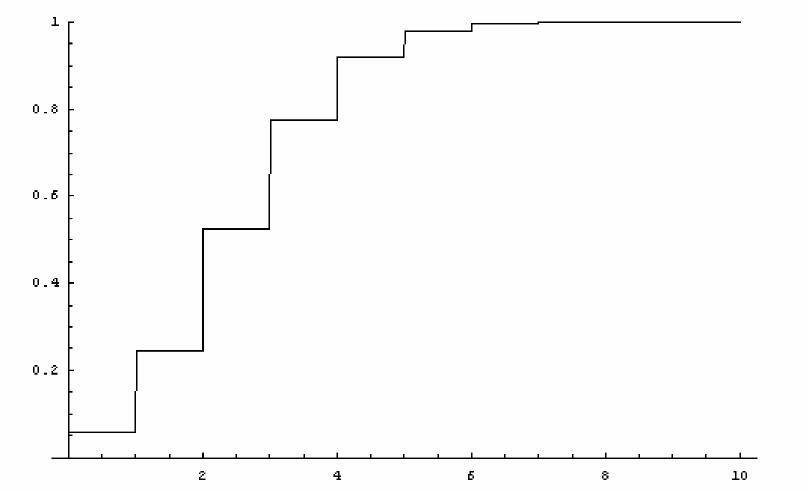
$$B(p)=B(1,p)=C_1^x p^x q^{1-x}=p^x q^{n-x} \qquad x=0,1$$

$B(10,1/4)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



2.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$E(X) = np$, $V(X) = npq$, $\Psi(t) = \left(pe^t + q\right)^n$

3. LOI MULTINOMINALE $M(n,p,k)$

3.1. Définition (une généralisation de la loi Binomiale)

Soit une expérience possédant k résultats possibles $A_1,\ldots,A_i,\ldots,A_k$ de probabilités respectives $p_1,\ldots,p_i,\ldots,p_k$. Soit X_i la v.a. qui est égale au nombre x_i de réalisations de A_i au cours de n épreuves indépendantes (problème de tirages successifs avec remise).

La probabilité que A_i soit réalisé x_i fois, est égale à $p_i^{x_i}$ (évènements indépendants).

La probabilité que les k A_i soient réalisés, est égale à $\prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}$ fois le nombre de permutations avec répétitions des x_i parmi $n = \sum_{i=1}^{k} x_i$, c'est-à-dire fois $\dfrac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!}$;

$\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Loi de probabilités

$$P(X = x) = P(X_1 = x_1,\ldots,X_i = x_i,\ldots,X_n = x_n) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{k} x_i!} \prod_{i=1}^{k} p_i^{x_i}$$

avec $\sum_{i=1}^{k} x_i = n$ et $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

3.2. Espérance et variance

$E(X)$ a pour composantes les espérances marginales $E(X_i)$

$V(X)$ a pour composantes les variances marginales $V(X_i)$

4. LOI GEOMETRIQUE $G(p)$

4.1. Définition

Soit une expérience ne possédant que 2 résultats possibles A et $\overline{A}$ de probabilités respectives p et $q = 1 - p$. Soit X la v.a. qui est égale au nombre x de réalisations de $\overline{A}$ avant la 1ère réalisation de A au cours d'un nombre infini d'épreuves indépendantes (problème de tirages successifs avec remise).
Si $x = 0$, il y a réalisation de A à la 1ère épreuve avec la probabilité p, $P(X = 0) = p$.

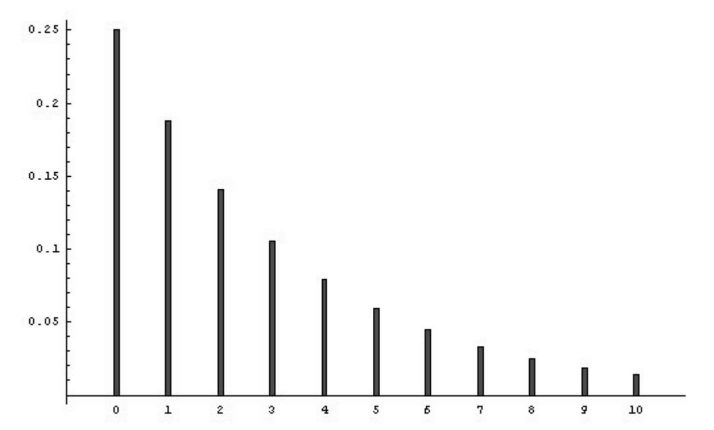
Si $x = 1$, il y a réalisation de $\overline{A}$ à la 1ère épreuve avec la probabilité q et réalisation de A à la 2ème épreuve avec la probabilité p, $P(X = 1) = pq$.

Loi de probabilités

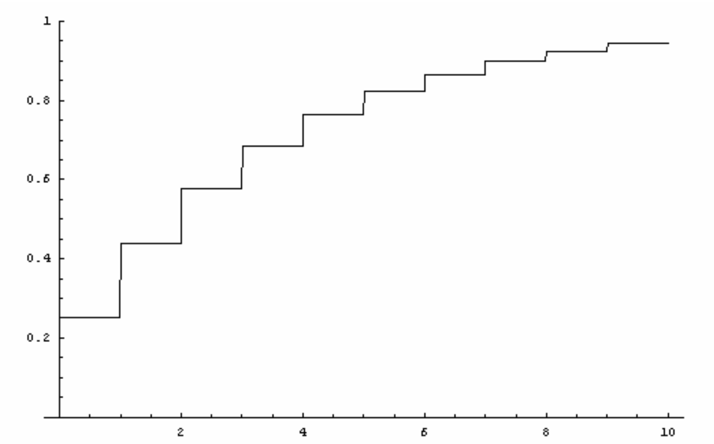
$$P(X = x) = pq^x \qquad x = 0,\ldots$$

$G(1/4)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



4.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \frac{q}{p},\ V(X) = \frac{q}{p^2},\ \Psi(t) = \frac{p}{1-qe^t} \qquad 0 < qe^t < 1$$

5. LOI BINOMIALE NEGATIVE $\overline{B}(r,p)$

5.1. Définition (une généralisation de la loi Géométrique)

Soit une expérience ne possédant que 2 résultats possibles A et $\overline{A}$ de probabilités respectives p et $q = 1-p$. Soit X la v.a. qui est égale au nombre x de réalisations de $\overline{A}$ avant la r ième réalisation de A au cours de $r+x$ épreuves indépendantes (problème de tirages successifs avec remise).

La probabilité que $\overline{A}$ soit réalisé x fois, est égale à q^x (événements indépendants). La probabilité que A soit réalisé r fois, est égale à p^r (événements indépendants). La probabilité que $X = x$ est donc égale à $p^r q^x$ (événements indépendants) fois le nombre de combinaisons sans répétition de $r-1$ parmi $r+x-1$, C_{r+x-1}^{r-1}.

Loi de probabilités

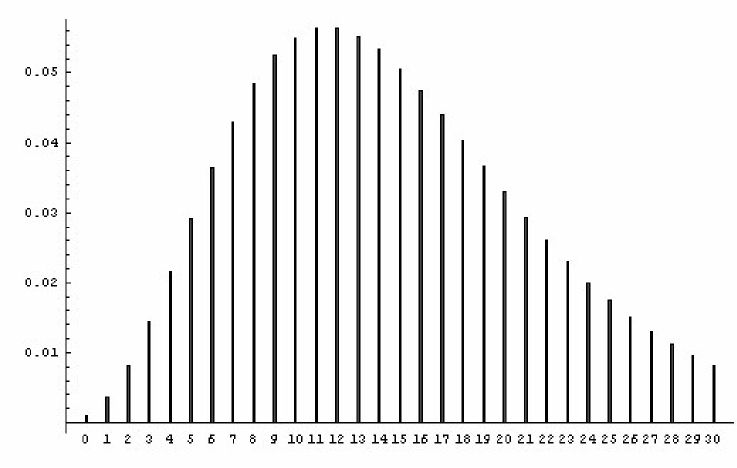
$P(X = x) = C_{r+x-1}^{r-1}\, p^r q^x \qquad x = 0,\dots$

Une variable Binomiale Négative X est une somme de r variables Géométriques X_i indépendantes et de même paramètre p: $X = \sum_{i=1}^{r} X_i$.

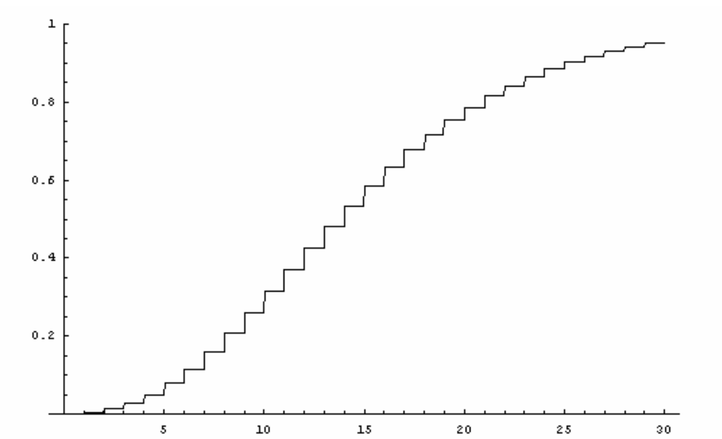
$G(p) = \overline{B}(1,p) = C_x^o\, p q^x = p q^x$

$\overline{B}(5,1/4)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



5.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X)=\frac{rq}{p},\ V(X)=\frac{rq}{p^2},\ \Psi(t)=\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

6. LOI HYPERGEOMETRIQUE $H(N,n,p)$

6.1. Définition

Soit une urne contenant N boules avec une probabilité p de boules blanches et une probabilité $q = 1 - p$ de boules non blanches. n boules sont prélevées sans remise dans cette urne, $n \le N$. Soit X la v.a. qui est égale au nombre x de boules blanches parmi les n boules prélevées (problème de tirages successifs sans remise).

Nombre de possibilités d'obtenir n boules prélevées parmi N boules de l'urne: C_N^n

Nombre de possibilités d'obtenir x boules blanches parmi les Np boules blanches de l'urne: C_{Np}^x.

Nombre de possibilités d'obtenir $n - x$ boules non blanches parmi les Nq boules non blanches de l'urne: C_{Nq}^{n-x}.

Loi de probabilités

$$P(X = x) = \frac{C_{Np}^x \times C_{Nq}^{n-x}}{C_N^n} \qquad x = 0,\ldots,n$$

6.2. Espérance et variance

$$E(X) = np,\ V(X) = \frac{N-n}{N-1}npq$$

7. LOI UNIFORME DIRECTE $U(n)$

7.1. Définition

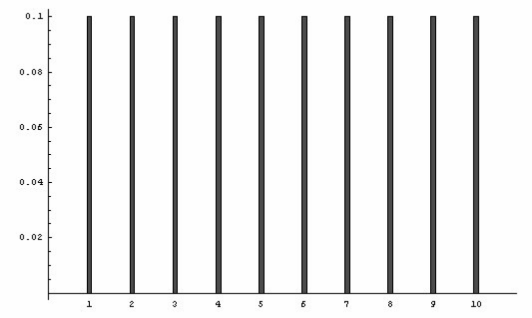
Soit X la v.a. prenant les valeurs $1,2,\ldots,n$ avec la probabilité $\frac{1}{n}$.

Loi de probabilités

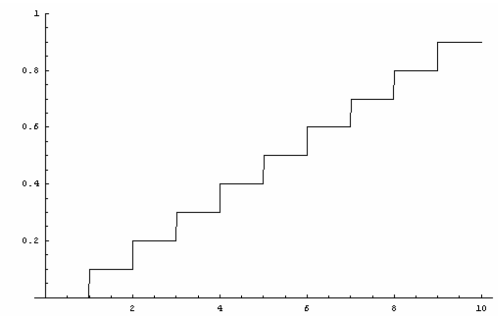
$$P(X=x)=\frac{1}{n} \qquad x=1,\ldots,n$$

$U(10)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



7.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X)=\frac{n+1}{2},\ V(X)=\frac{n^2-1}{12},\ \Psi(t)=\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}e^{tx}$$

8. LOI DE POISSON $P(\lambda)$

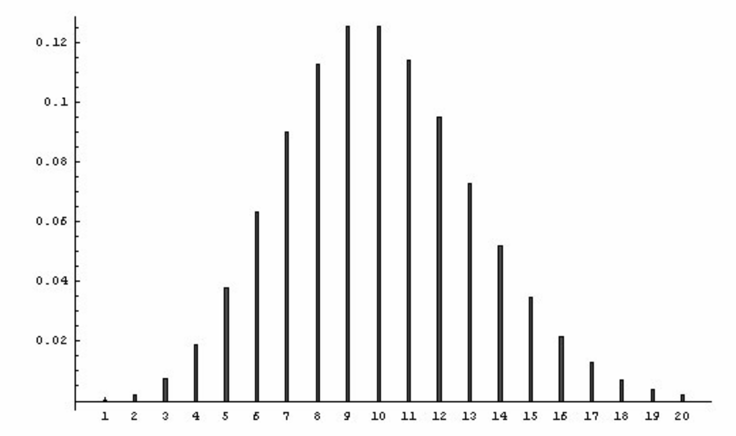
8.1. Définition

Loi de probabilités

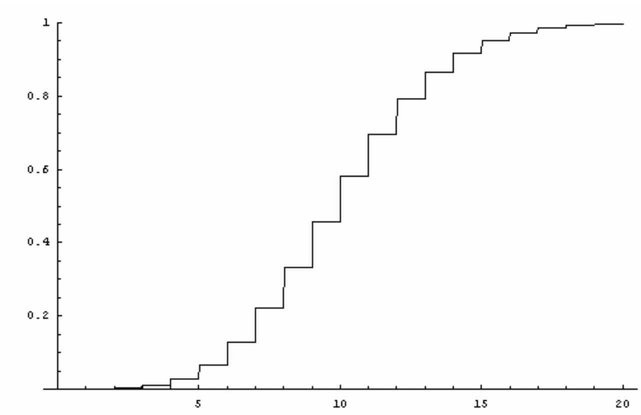
$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0, \ldots$$

P(10)

Loi de probabilités



Fonction de répartition



8.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \lambda,\ V(X) = \lambda,\ \Psi(t) = e^{\lambda e^{t} - \lambda}$$

CP5: LOIS DE PROBABILITES CONTINUES USUELLES

1. LOI UNIFORME CONTINUE $U(a,b)$

1.1. Définition

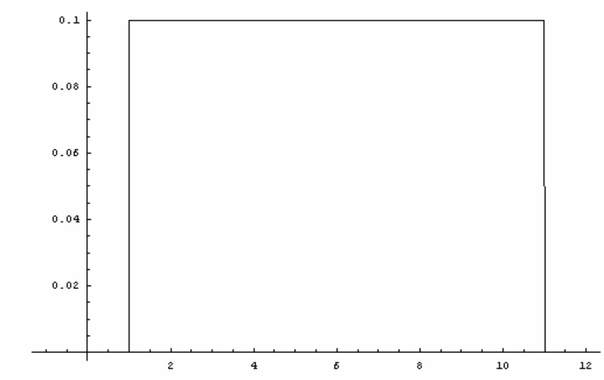
La variable Uniforme continue X a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\le x\le b\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$$

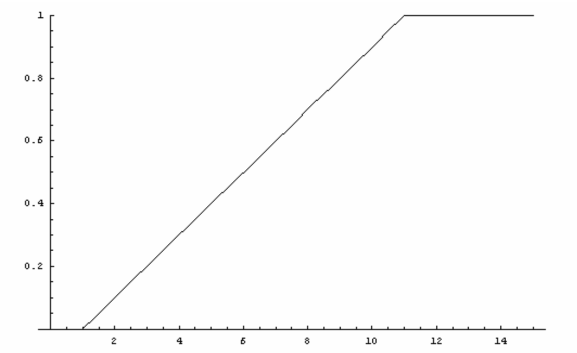
$$F(x)=\begin{cases}0 & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a} & a\le x\le b\\ 1 & x>b\end{cases}$$

$U(1,11)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



1.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \frac{b+a}{2},\ V(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

2. LOI EXPONENTIELLE $E(\lambda)$

2.1. Définition

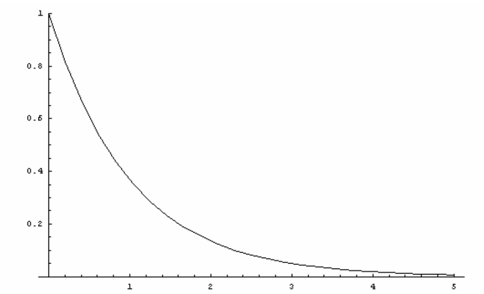
La variable Exponentielle X de paramètre λ a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

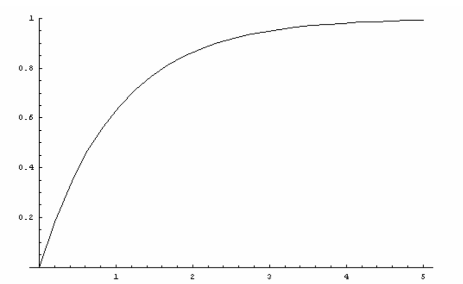
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0, \lambda > 0 \end{cases}$$

$E(1)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



2.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ V(X) = \frac{1}{\lambda^2},\ \Psi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

3. LOI NORMALE (LOI DE GAUSS) $N(\mu,\sigma)$

3.1. Définition

La variable Normale X de paramètres μ (moyenne) et σ (écart-type) a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad -\infty<x<+\infty,\ -\infty<\mu<+\infty,\ \sigma>0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

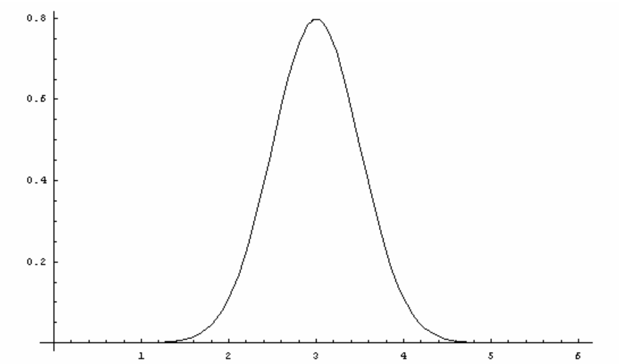
Somme des probabilités

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx$$

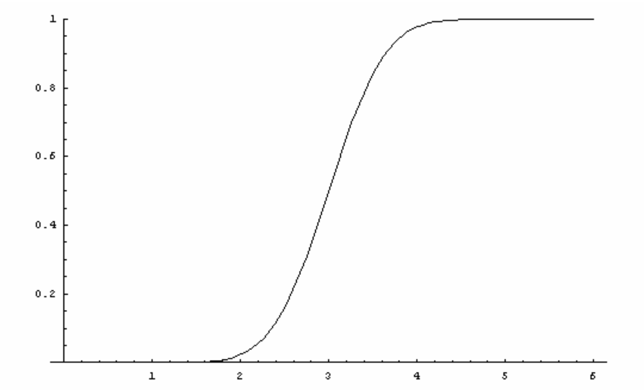
Faire le changement de variable: $y=\frac{x-\mu}{\sigma}$. Puis, la primitive de $e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ne pouvant pas être calculée, on étudie I^2. Enfin, faire un changement par coordonnées polaires.

$N(3,0.5)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



3.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \mu, \; V(X) = \sigma^2, \; \Psi(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

3.3 Propriétés

P1

Si X est une v.a. qui suit une loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors la v.a. $Y = aX + b$ (a et b constants et $a \neq 0$) suit une loi Normale de moyenne $a\mu + b$ et d'écart-type $a\sigma$

Si $X \sim N(\mu, \sigma)$ alors $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, a\sigma)$

P2

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont n v.a. indépendantes et si X_i suit une loi Normale de moyenne μ_i et d'écart-type σ_i, alors la v.a. $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Normale de moyenne $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$ et d'écart-type $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}$

Si $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$ alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2} \right)$

P3

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n v.a. indépendantes et si X_i suit une loi Normale de moyenne μ_i et d'écart-type σ_i, alors la v.a. $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b$ ($a_1,\dots,a_n$ et b constants et $a_i \neq 0$) suit une loi Normale de moyenne $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b$ et d'écart-type $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}$

Si $X_i \sim N(\mu_i,\sigma_i)$ alors $Y=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i + b \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i + b, \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2}\right)$

P4

Si $X_1,\dots,X_n$ sont n v.a. indépendantes et si X_i suit une loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors la v.a. $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ suit une loi Normale de moyenne μ et d'écart-type $\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$

Si $X_i \sim N(\mu,\sigma)$ alors $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N\left(\mu, \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}\right)$

Les v.a. $X_1,\dots,X_n$ forment un échantillon issu d'une population.

3.4. Loi Normale Centrée Réduite $N(0,1)$

3.4.1. Définition

La loi Normale Centrée Réduite $N(0,1)$ est un cas particulier de la loi Normale $N(\mu,\sigma)$ avec une moyenne $\mu = 0$ et un écart-type $\sigma = 1$.

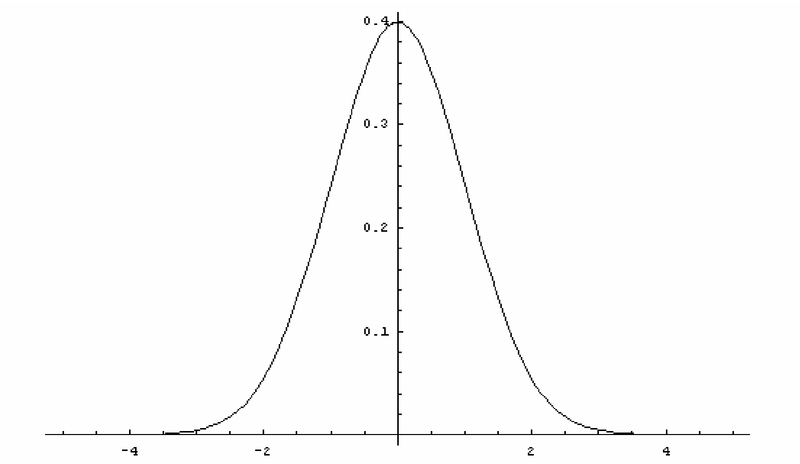
La variable Normale Centrée Réduite X de paramètres $\mu = 0$ (moyenne) et $\sigma = 1$ (écart-type) a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad -\infty < x < +\infty$$

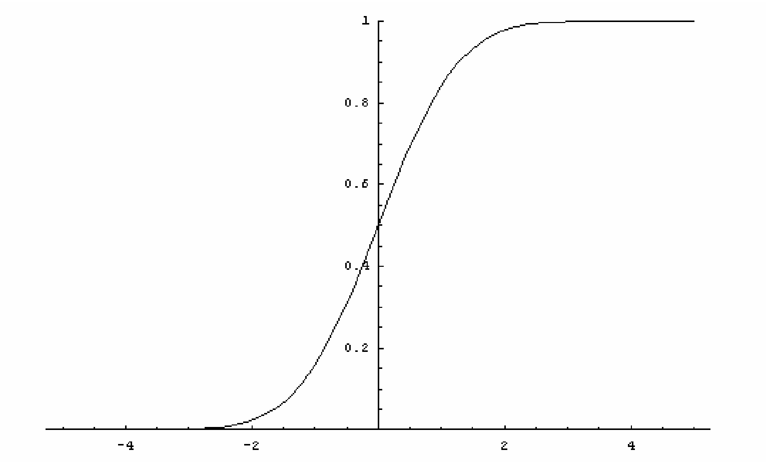
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

$N(0,1)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



3.4.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$E(X)=0$, $V(X)=1$, $\Psi(t)=e^{\frac{1}{2}t^2}$

3.4.3. Relation entre variable Normale et variable Normale Centrée Réduite

Si X est une v.a. qui suit une loi Normale de moyenne μ et d'écart-type σ, alors la v.a. $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi Normale de moyenne $\mu=0$ et d'écart-type $\sigma=1$, c'est-à-dire Y suit une loi Normale Centrée Réduite

Si $X \sim N(\mu,\sigma)$ alors $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

3.4.4. Etude de la densité d'une variable Normale Centrée Réduite

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

(i) $f(x)>0$

(ii) $f(x)$ est paire: $f(x)=f(-x)$

(iii) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

(iv) $f(x)$ a un maximum en $\left(x=0, f(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\sim(0,0.4)$

(v) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=1\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{1}{2}x^2}dx=\sqrt{2\pi}$ ($f(x)$ est une densité de probabilité)

(vi) $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=P(-\infty\le X\le x)=P(X\le x)$

$=\int_{-x}^{+\infty} f(x)dx=P(-x\le X\le+\infty)=P(X\ge -x)$ ((ii) et P4 de 4.6.3)

(vii) $P(X\le x)=F(x)=P(X\ge -x)=1-F(-x)$ (P1 de 4.3)

3.4.5. Etude de la fonction de répartition d'une variable Normale Centrée Réduite

La fonction de répartition $F(x)$ donnant les probabilités de la variable Normale Centrée Réduite est déterminée par approximation numérique puisque la primitive de $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ne peut pas être calculée. Ces probabilités sont données dans des tables qui sont importantes en statistiques.

La table de $F(x)$ de $X\sim N(0,1)$ permet de déterminer la probabilité $F(x)=P(X\le x)$ pour une valeur x de la variable Normale Centrée Réduite et réciproquement. Par exemple, $F(x)=0.99$ pour $x=2.33$, c'est-à-dire $P(X\le 2.33)=0.99$. En général, la table de $F(x)$ de $X\sim N(0,1)$ ne donne les probabilités $F(x)$ que pour les valeurs positives de x. Les probabilités $F(x)$ pour des valeurs négatives de x s'obtiennent avec la relation (vii) en remplaçant x par $-x$: $P(X\le -x)=F(-x)=P(X\ge x)=1-F(x)$.

3.4.6. Utilisation de la table de $F(x)$ de $X \sim N(0,1)$ en statistiques

En statistiques, par exemple dans l'estimation par intervalle ou dans les tests d'hypothèse, un intervalle de confiance $]-\infty, x]$ ou $[-x, x]$ est affecté à une probabilité de confiance $1-\alpha$ où α est la probabilité d'erreur (souvent exprimée en pourcentage). α est donné et x doit être déterminé avec la table. 2 situations selon que l'intervalle de confiance est $]-\infty, x]$ (test d'hypothèse unilatéral) ou $[-x, x]$ (test d'hypothèse bilatéral).

3.4.6.1. Intervalle de confiance $]-\infty, x]$

Au seuil $\alpha = 1\%$, $x = 2.33$
Au seuil $\alpha = 5\%$, $x = 1.64$

3.4.6.2. Intervalle de confiance $[-x, x]$

La probabilité d'erreur α se divise en 2 probabilités d'erreur égales à $\alpha/2$ quand $x \to -\infty$ et $x \to +\infty$ pour avoir une probabilité de confiance égale à $1-\alpha$.
Au seuil $\alpha = 1\%$, $x = 2.58$
Au seuil $\alpha = 5\%$, $x = 1.96$

En conclusion, les tables pour des intervalles de confiance $]-\infty, x]$ (x est associé à $1-\alpha$ ou α) peuvent être utilisées pour des intervalles de confiance $[-x, x]$ mais x est associé à $1-\alpha+\frac{\alpha}{2}$ ou $\frac{\alpha}{2}$. Il existe des tables pour des intervalles de confiance $[-x, x]$ (x est associé à $1-\alpha$ ou α) qu'il ne faut pas confondre avec les tables pour des intervalles de confiance $]-\infty, x]$ que l'on rencontre le plus souvent.

3.5. La loi Log-Normale $LN(\mu,\sigma,x_0)$

3.5.1. Définition

La variable Log-Normale X de paramètres μ (moyenne), σ (écart-type) et x_0 (une valeur donnée de x) est égale à la variable Normale $\ln(X-x_0)$ (logarithme népérien) de paramètres μ et σ et également égale à la variable Normale Centrée Réduite $Y=\dfrac{\ln(X-x_0)-\mu}{\sigma}$ de paramètres $\mu=0$ et $\sigma=1$. X et Y sont donc de la forme

$$X=x_0+e^{\mu+\sigma Y}\sim LN(\mu,\sigma,x_0)$$

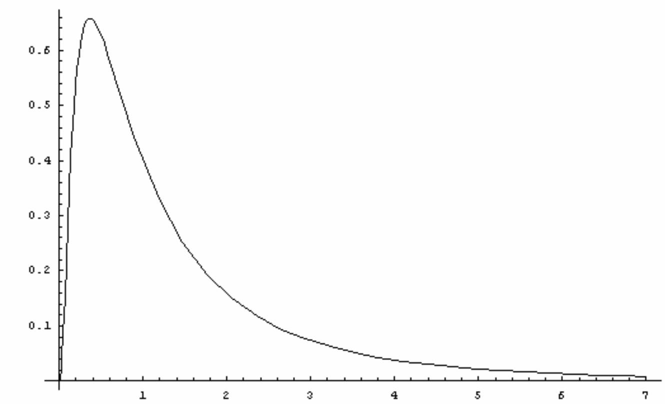
La variable Log-Normale X de paramètres μ (moyenne), σ (écart-type) et x_0 a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma(x-x_0)}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\ln(x-x_0)-\mu}{\sigma}\right]^2} & x\geq x_0,\ -\infty<\mu<+\infty,\ \sigma>0\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$$

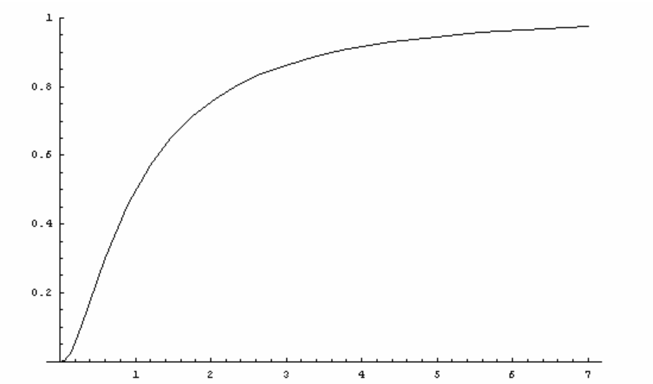
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\,dt$$

$LN(0,1,0)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



3.5.2. Espérance et variance

$$E(X) = x_0 + e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}, \; V(X) = \left(1 - e^{-\sigma^2}\right) e^{2\left(\mu + \sigma^2\right)}$$

3.6. Loi Binomiale (2 dimensions) et Multinomiale (n dimensions)

cf livres.

4. LOI GAMMA $G(\alpha,\beta)$

4.1. Définition

La variable Gamma X de paramètres α et β a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x} & x\geq 0, \alpha>0, \beta>0\\ 0 & \text{autrement}\end{cases} \quad \text{avec } \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx \qquad \alpha>0$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

La loi $G(\alpha=1,\beta)$ est une loi exponentielle de paramètre β

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}dx=-\int_0^\infty -e^{-x}dx=-\left[e^{-x}\right]_0^\infty=-[0-1]=1$$

$$f(x)=\beta e^{-\beta x}$$

Rappel: propriétés de la fonction $\Gamma(\alpha)$

P1

$$\Gamma(\alpha)=\beta^\alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-\beta x}dx$$

P2

$$\Gamma(\alpha)=(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1) \quad \alpha>1$$

P3

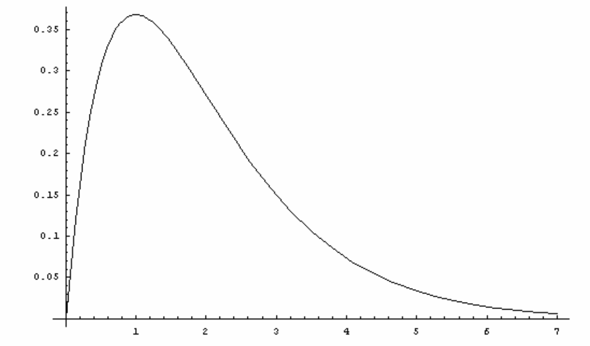
$$\Gamma(n)=(n-1)! \quad n\in N^+$$

P4

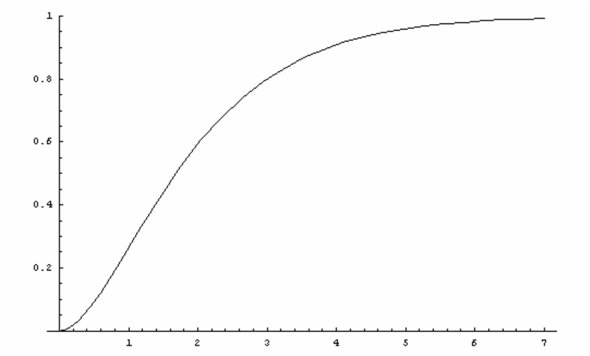
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$$

G(2,1)

Loi de probabilités



Fonction de répartition



4.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X)=\frac{\alpha}{\beta},\ V(X)=\frac{\alpha}{\beta^2},\ \Psi(t)=\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^{\alpha}$$

5. LOI DE ERLANG $E(\alpha,\lambda)$

5.1. Définition

La loi de Erlang $E(\alpha,\lambda)$ de paramètres α et λ est une loi Gamma $G(\alpha,\beta)$ de paramètres α et $\beta = \lambda\alpha$. La variable de Erlang X de paramètres α et λ a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda\alpha)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda\alpha x} & x \geq 0, \alpha > 0, \lambda > 0 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

5.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = \frac{1}{\lambda},\ V(X) = \frac{1}{\alpha\lambda^2},\ \Psi(t) = \left(\frac{\lambda\alpha}{\lambda\alpha - t}\right)^{\alpha}$$

6. LOI BETA $B(\alpha,\beta)$

6.1. Définition

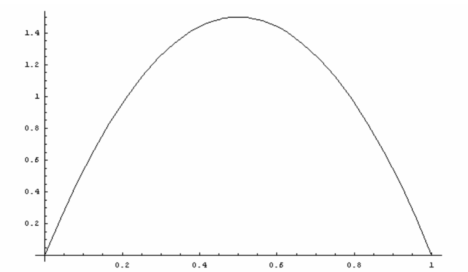
La variable Beta X de paramètres α et β a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & 0\le x\le 1, \alpha>0, \beta>0\\ 0 & \end{cases}$$

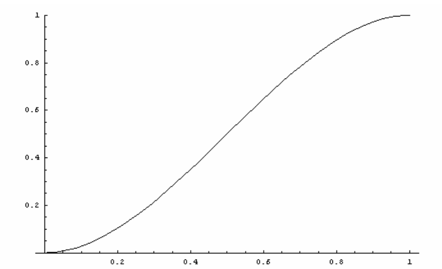
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$$

$B(2,2)$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



6.2. Espérance et variance

$$E(X)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta},\ V(X)=\frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

7. LOI DE LAPLACE L

7.1. Définition

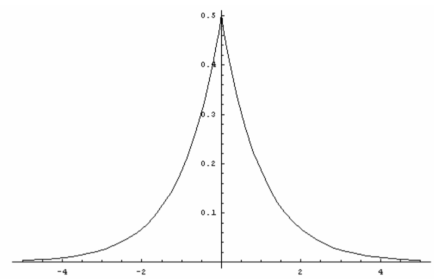
La variable de Laplace X a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|} \qquad -\infty < x < +\infty$ c'est-à-dire

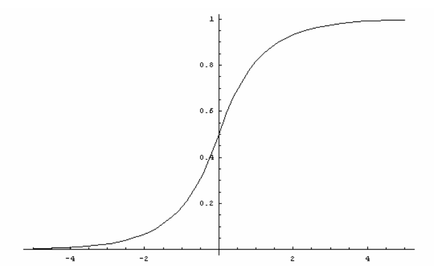
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \le 0 \\ \frac{1}{2} e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{x} & x \le 0 \\ \frac{1 - e^{-x}}{2} + \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2} e^{-x} & x \ge 0 \end{cases}$$

Loi de probabilités



Fonction de répartition



7.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = 0,\ V(X) = 2,\ \Psi(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)$$

8. LOI DU KHI-DEUX χ_n^2

8.1. Définition

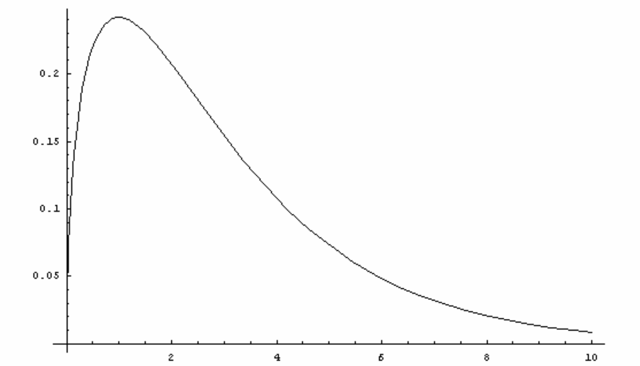
La variable du Khi-Deux à n degrés de liberté est une variable Gamma de paramètres $\alpha = \frac{n}{2}$ et $\beta = \frac{1}{2}$ avec une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & x \geq 0, n > 2 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

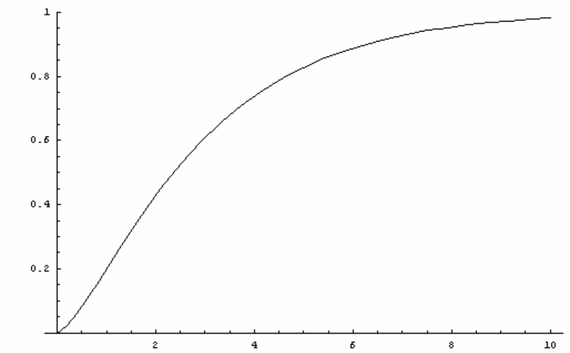
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

χ_3^2 à 3 degré de liberté

Loi de probabilités



Fonction de répartition



8.2. Espérance, variance et fonction génératrice des moments

$$E(X) = n,\ V(X) = 2n,\ \Psi(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

8.3. Propriété

Si $X_i \sim N(0,1)$ et si X_i indépendants alors $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi_n^2$

9. LOI DE STUDENT t_n

9.1. Définition

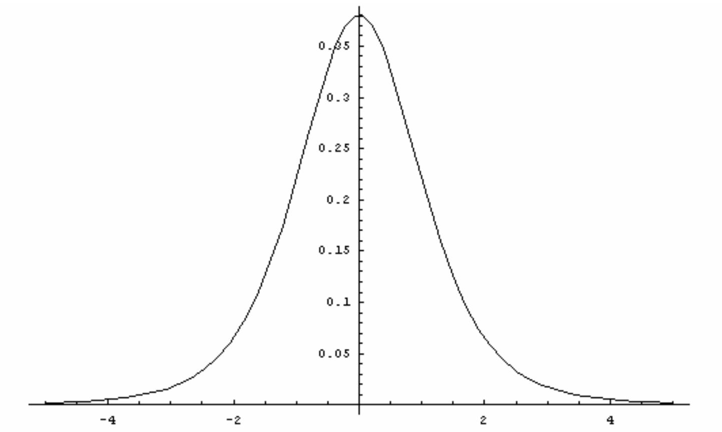
La variable de Student à n degrés de liberté a une densité de probabilité et une fonction de répartition

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{(n\pi)^{\frac{1}{2}}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{(n+1)}{2}} \qquad -\infty < x < +\infty$$

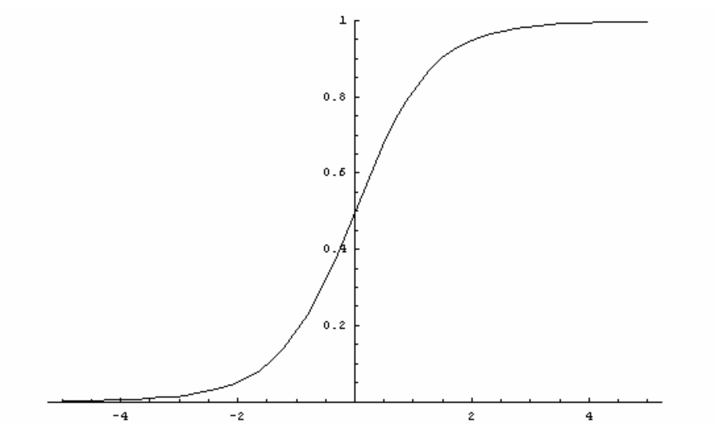
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

t_5 à 5 degrés de liberté

Loi de probabilités



Fonction de répartition



9.2. Espérance et variance

$$E(X) = 0 \quad n > 1, \; V(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2$$

9.3. Propriété

Si $X \sim N(0,1)$ et si $Y \sim \chi^2_n$ alors $Z = \dfrac{X}{\sqrt{\dfrac{Y}{n}}} \sim t_n$

10. LOI DE FISCHER-SNEDECOR $F_{m,n}$

10.1. Définition

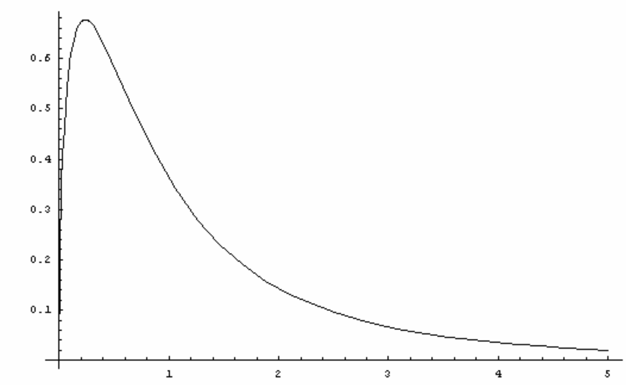
La variable de Student-Snedecor à m et n degrés de liberté a une densité de probabilités et une fonction de répartition

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)m^{\frac{m}{2}}n^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}\times\dfrac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}} & x\geq 0\\ 0 & \text{autrement}\end{cases}$$

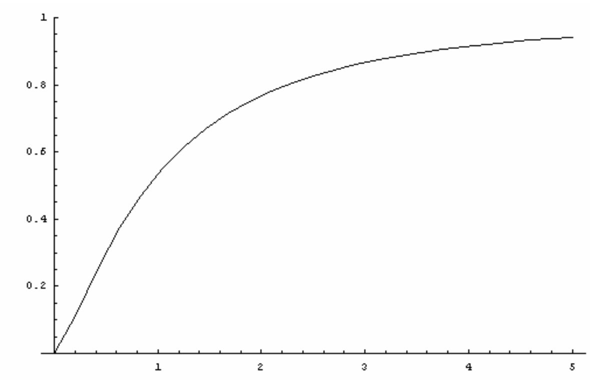
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$F_{3,5}$ à 3 et 5 degrés de liberté

Loi de probabilités



Fonction de répartition



10.2. Espérance et variance

$$E(X) = \frac{n}{n-2} \quad n > 2, \; V(X) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \quad n > 4$$

10.3. Propriétés

Si $X \sim \chi^2_m$ et si $Y \sim \chi^2_n$ alors $Z = \dfrac{\frac{X}{m}}{\frac{Y}{n}} \sim F_{m,n}$