

**UFR de Mathématique et Informatique**  
**L3 Informatique S6, 2012-2013, semestre de printemps**

**Probabilités, Statistiques et Combinatoire**

**Contrôle Continu de Combinatoire, mars 2013**

Durée : 1 heure

*Tous documents (papier) autorisés mais non partagés*

*Calculatrices inutiles*

*Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

**Justifier soigneusement les réponses**

(1) Un jury de 45 experts compare 4 fromages : brie, camembert, gruyère et munster. Chacun vote sur un bulletin où il classe ces fromages par ordre de préférence : le 1er, le 2ème, le 3ème et le 4ème.

(i) Combien de votes différents chaque expert peut-il émettre ?

(ii) On suppose que le vote est nominatif : chaque expert inscrit son nom sur son bulletin, et le procès-verbal indique en face de chaque nom son vote. Combien de votes différents sont-ils possibles sur le procès-verbal ?

(iii) On suppose que le vote est anonyme : les bulletins de vote ne comprennent aucune mention de nom, et sont placés par chacun dans une urne. Après dépouillement, combien de votes différents sont-ils possibles ?

(iv) Après le vote, on remplit un tableau à 4 lignes et 4 colonnes ; chaque ligne correspond à un fromage (B, C, G ou M), et chaque colonne à un rang (1er, 2ème, 3ème ou 4ème) ; dans la case à l'intersection d'un fromage  $X$  et d'un rang  $n$ , on indique le nombre de bulletins de vote où le fromage  $X$  a été classé  $n$ -ième. Que peut-on dire des lignes et des colonnes de ce tableau ?

(2) Soient  $P$  et  $Q$  deux ensembles ordonnés par les relations d'ordre  $\leq$  sur  $P$  et  $\preceq$  sur  $Q$ , avec les ordres stricts  $<$  et  $\prec$ , et soit  $f : P \rightarrow Q$  une application. On définit la relation  $\models$  sur  $P$  comme suit : pour  $p, q \in P$ , on a  $p \models q$  si et seulement si soit  $f(p) \prec f(q)$ , soit  $f(p) = f(q)$  et  $p \leq q$ .

(i) Montrer que  $\models$  est une relation d'ordre sur  $P$ .

(ii) Montrer que si les relations d'ordre  $\leq$  et  $\preceq$  sont totales (sur  $P$  et  $Q$  respectivement), alors la relation d'ordre  $\models$  sur  $P$  est totale.

(3) Soit  $\mathbb{Z}$  l'ensemble des entiers relatifs. On considère la fonction  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  définie comme suit :

$$f(z) = \begin{cases} -z + 1 & \text{si } z \geq 2, \\ -z - 1 & \text{si } z \leq -2, \\ -z & \text{si } |z| \leq 1. \end{cases}$$

(i) Comparer  $|z|$  et  $|f(z)|$  pour  $z \in \mathbb{Z}$ .

(ii) Quels sont les cycles attracteurs de  $f$ , quelle est leur période ?