

Probabilités, Statistiques et Combinatoire

Contrôle Continu de Combinatoire, 25 octobre 2018

Durée : 1 heure

Responsable : Prof. Christian RONSE

*Tous documents (papier) autorisés mais non partagés — Calculatrices inutiles  
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

*Justifiez soigneusement vos réponses !*

(1) Un *mot de Lamé* est un mot booléen (chaîne de symboles 0 ou 1) où n'apparaissent pas plusieurs symboles 0 consécutifs. Par exemple '10110' est un mot de Lamé de longueur 5 (les 0 sont isolés), tandis que '11001' n'en est pas un (à cause de deux 0 consécutifs). Soit  $L_n$  le nombre de mots de Lamé de longueur  $n$ .

(i) Donner tous les mots de Lamé de longueur 0, 1 et 2, puis les valeurs de  $L_0$ ,  $L_1$  et  $L_2$ .

(ii) On considère un mot de Lamé de longueur  $n + 2$  se terminant par le symbole 1, c.-à-d. de la forme ' $a_1 \cdots a_{n+1}1$ ', avec  $a_i \in \{0, 1\}$  pour  $i = 1, \dots, n + 1$ . Quelles sont les contraintes sur les occurrences du symbole 0 parmi les  $n + 1$  premiers symboles  $a_1, \dots, a_{n+1}$  ?

(iii) Même question pour un mot de Lamé de longueur  $n + 2$  se terminant par le symbole 0, ' $a_1 \cdots a_{n+1}0$ '.

(iv) Montrer qu'il y a  $L_{n+1}$  mots de Lamé de longueur  $n + 2$  se terminant par le symbole 1.

(v) Montrer qu'il y a  $L_n$  mots de Lamé de longueur  $n + 2$  se terminant par le symbole 0.

(vi) Exprimer  $L_{n+2}$  en fonction de  $L_{n+1}$  et  $L_n$ .

(vii) On la suite de Fibonacci  $F_n$ , donnée par la récurrence  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ , avec  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$ ,  $F_2 = 1$ ,  $F_3 = 2$ ,  $F_4 = 3$ , etc. Exprimer  $L_n$  en termes des  $F_m$ .

(2) Soit  $R$  une relation sur un ensemble  $E$  et soit  $R^+$  sa fermeture transitive. Montrer que si  $R^+$  est réflexive et anti-symétrique, alors  $R$  est réflexive. *Indication* : utiliser la décomposition de  $R^+$  comme union des puissances de  $R$ , c.-à-d.  $R^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ .