GRAPHES

Références :

A. Arnold & I. Guessarian : Mathématiques pour l'Informatique

C. Berge . Graphes et hypergraphes

T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R. Rivest & C. Stein : Introduction to Algorithms

Les graphes sont utilisés en chimie, dans les circuits électroniques, en gestion, recherche opérationnelle, topologie combinatoire et enfin en informatique : structures de données, ordonnancement, réseaux.

Graphe orienté

Un graphe orienté est un quadruple (S, A, α, β), où

S est un ensemble de sommets,

A est un ensemble d'~~arêtes~~ arcs, $\quad S \cap A = \emptyset$

$\alpha, \beta : A \to S$ sont des fonctions d'incidence

On dessine $x \xrightarrow{a} y$ pour $x = \alpha(a)$, $y = \beta(b)$

$\alpha(a)$ et $\beta(a)$

sont appelés origine de a et but de a

queue de a et tête de a

extrémité initiale de a et extrémité finale de a

a sort de $\alpha(a)$ et entre en $\beta(a)$

$\beta(a)$ est un successeur de $\alpha(a)$

$\alpha(a)$ est un prédécesseur de $\beta(a)$

$\alpha(a)$ et $\beta(a)$ sont $\begin{cases} \text{adjacents} \\ \text{voisins} \end{cases}$

Graphe non orienté

Un graphe non orienté est un triple (S, A, δ), où

S est un ensemble de sommets $\quad S \cap A = \emptyset$

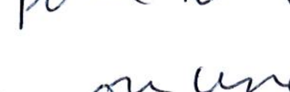
A est un ensemble d'arêtes

$\delta : A \to \mathcal{P}(S)$ est une fonction d'incidence,

telle que pour tout $a \in A$, $\delta(a)$ est un singleton ou une paire

On dessine 

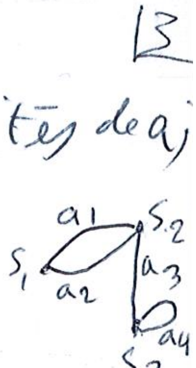
pour $\delta(a) = \{x\}$



pour $\delta(a) = \{x, y\}$

Les éléments de $S(a)$ sont les extrémités de a ; ils sont incidents à a.

Pour $a = \{x, y\}$, x et y sont $\begin{cases} \text{adjacents} \\ \text{voisins} \end{cases}$



Matrice d'incidence.

Soient $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ et $A = \{a_1, \dots, a_m\}$

Graphe orienté :

La matrice $n \times m$ (m_{ij}) donné par

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{si } s_i = \alpha(a_j) \\ -1 & \text{si } s_i = \beta(a_j) \\ \pm 1 & \text{si } s_i = \alpha(a_j) = \beta(a_j) \text{ (boucle)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

caractérise le graphe (S, A, α, β).

Graphe non orienté :

La matrice $n \times m$ (m_{ij}) donnée par

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } s_i \in \delta(a_j) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

caractérise le graphe (S, A, δ)

Matrice d'adjacence ;

Graphe orienté :

La matrice $n \times n$ (m_{ij}) donnée par

m_{ij} = nombre d'$a_k \in A$ avec $\alpha(a_k) = s_i$ et $\beta(a_k) = s_j$

décrit le graphe (S, A, α, β)

Graphe non orienté :

La matrice $n \times n$ (m_{ij}) donnée par

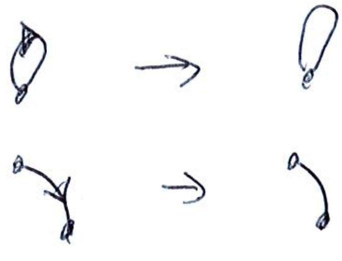
m_{ij} = nombre d'$a_k \in A$ avec $\delta(a_k) = \{s_i, s_j\}$

décrit le graphe (S, A, δ) $\quad$ $m_{ij} = m_{ji}$ symétrique

Ici, dans la matrice d'adjacence, les arcs/arêtes deviennent "anonymes", on ne connaît plus le numéro des arêtes incidentes à 2 sommets.

Orientation

A tout graphe orienté $G = (S, A, \alpha, \beta)$ correspond un graphe non orienté $\gamma(G) = (S, A, \delta)$, où pour $a \in A$ on pose : $\delta(a) = \{\alpha(a), \beta(a)\}$



Etant donné un graphe non orienté G,

une orientation de G est un graphe orienté G' tel que $f(G') = G$.

Il y a en général plusieurs orientations

choix unique

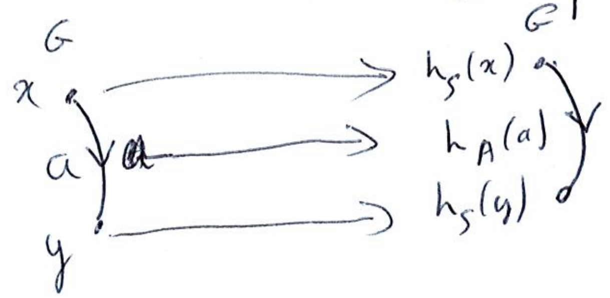
ou

2 choix

Graphes isomorphes

Soient $G = (S, A, \alpha, \beta)$ et $G' = (S', A', \alpha', \beta')$ 2 graphes orientés. Un isomorphisme de G vers G' est donné par 2 bijections $h_S : S \to S'$ et $h_A : A \to A'$ telles que

$$\forall a \in A, \quad \alpha'(h_A(a)) = h_S(\alpha(a))$$
$$\beta'(h_A(a)) = h_S(\beta(a))$$



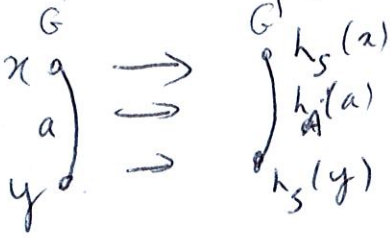
Exemple

G

G'

Soient $G = (S, A, \delta)$ et $G' = (S', A', \delta')$ 2 graphes non orientés. Un isomorphisme de G vers G' est donné par 2 bijections $h_S : S \to S'$ et $h_A : A \to A'$ telles que

$$\forall a \in A, \quad \delta'(h_A(a)) = \{h_S(s) \mid s \in \delta(a)\}$$



<u>Exemple.</u> G

G'

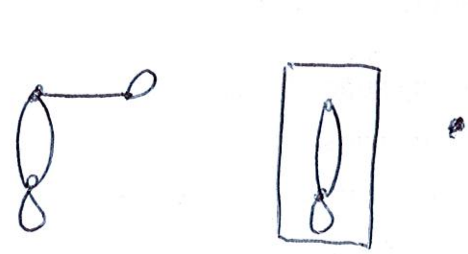
<u>Sous-graphe</u> Soit $S' \subset S$. Le sous-graphe engendré par S' est obtenu en ne conservant que les arêtes/arcs joignant des sommets de S' (dont les extrémités sont dans S').

graphe orienté : $A' = \{a \in A \mid \alpha(a) \in S \text{ et } \beta(a) \in S\}$

S'

α', β' restrictions de α et β à A'

graphe non orienté $A' = \{a \in A \mid \delta(a) \subseteq S\}$

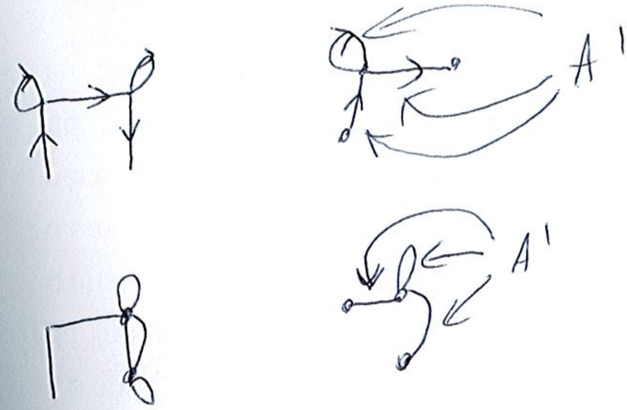


S'

δ' restriction de δ à A'

Graphe partiel. Soit $A' \subset A$

Le graphe partiel engendré par A' est le graphe (S, A', α', β') resp. (S, A', δ'), où α' et β' sont les restrictions de α et β à A', resp. δ' est la restriction de δ à A'



Sous-graphe partiel. On prend $S' \subset S$ et $A' \subset A$. Le sous-graphe engendré par S' du graphe partiel engendré par A' est égal au graphe partiel engendré par A' du sous-graphe engendré par S'

On prend S' et

$$A'' = \{a \in A' \mid \alpha(a) \in S' \text{ et } \beta(a) \in S'\} \quad \text{orienté}$$

$$\{a \in A' \mid \delta(a) \subseteq S'\} \quad \text{non orienté}$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha', \beta' \\ \delta'\end{matrix}\right\} \text{ restrictions de } \left\{\begin{matrix}\alpha, \beta \\ \delta\end{matrix}\right. \text{ à } A''$$

On garde les sommets de S' ~~incident~~ ~~à des arêtes de A'~~ et les arcs/arêtes de A' dont les extrémités sont dans S'

<u>Boucle</u> : arc/arête dont les extrémités coïncident

orienté : $\alpha(a) = \beta(a)$ 

non-orienté $\delta(a)$ est un singleton 

<u>Arcs/Arêtes multiples</u> : arcs/arêtes ayant les mêmes extrémités

orienté $\alpha(a_1) = \cdots = \alpha(a_n)$
$\beta(a_1) = \cdots = \beta(a_n)$

boucle multiple

non-orienté $\delta(a_1) = \cdots = \delta(a_n)$

<u>Graphe simple</u> : sans boucles ni arcs/arêtes multiples.

Dans un graphe orienté sans ~~arêtes~~ arcs multiples, tout arc a peut s'identifier au couple $(\alpha(a), \beta(a))$

Dans un graphe non orienté simple, toute arête a peut s'identifier à la paire $\delta(a)$.

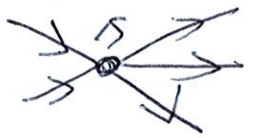
Un graphe non simple est appelé multigraphe.

<u>Degré</u> d'un sommet $s \in S$.

Graphe orienté :

$d^+(s) = \text{card}\,\{a \in A \mid s = \alpha(a)\}$ degré sortant de a

$d^-(s) = \text{card}\,\{a \in A \mid s = \beta(a)\}$ degré entrant de a

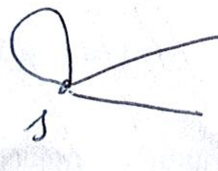


$d^-(s) = 2 \qquad d^+(s) = 3$

Graphe non orienté :

$$d(s) = \text{card}\,\{a \in A \mid s \in \delta(a) ;\ \delta(a) \text{ une paire}\}$$
$$+ 2\,\text{card}\,\{a \in A \mid \delta(a) = \{s\}\}$$

Les boucles en s comptent 2 fois



$d(s) = 4$

Pour $G' = \gamma(G)$, on a

$$\underbrace{d(s)}_{\text{dans } G'} = \underbrace{d^+(s) + d^-(s)}_{\text{dans } G}$$

Dans un graphe

orienté : $\sum_{s \in S} d^+(s) = \sum_{s \in S} d^-(s) = \text{card } A$

non orienté $\sum_{s \in S} d(s) = 2 \text{ card } A$

Compter les couples (a, s) avec $s = \alpha(a)$, puis $s = \beta(a)$ (graphe orienté), avec $s \in \delta(a)$ (graphe non orienté).

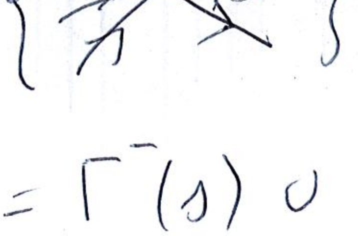
Voisinages. orienté

$\Gamma^+(s) = \{s' \in S \mid \exists a \in A,\ \alpha(a) = s,\ \beta(a) = s'\}$

ensemble des successeurs de s.

$\Gamma^-(s) = \{s' \in S \mid \exists a \in A,\ \alpha(a) = s',\ \beta(a) = s\}$

ensemble des prédécesseurs de s

$\Gamma^-(s)$  $\Gamma^+(s)$

$s \in \Gamma^+(s) \iff s \in \Gamma^-(s)$

$\iff \exists a \in A,\ \alpha(a) = \beta(a) = s$

$\Gamma(s) = \Gamma^-(s) \cup \Gamma^+(s)$ ensemble des voisins de s

non orienté

$$\Gamma(s) = \{ s' \in S \mid \exists a \in A \ \delta(a) = \{s, s'\} \}$$

ensemble des voisins de s. $s \in \Gamma(s) \Leftrightarrow \exists a \in A, \ \delta(a) = \{s\}$

Pour un graphe orienté G, les voisinages $\Gamma(s)$ sont identiques dans G et $\gamma(G)$.

Graphes particuliers

Un graphe non orienté simple est complet s'il y a toujours une arête entre 2 sommets distincts quelconques.

On écrit K_n pour le graphe complet à n sommets

K_5 

Dans un graphe non orienté simple, une clique est un sous-graphe complet.

2 cliques à 3 sommets chacune

Les paires de sommets adjacents forment des cliques.

Un graphe orienté G est complet ssi $\gamma(G)$ est complet 

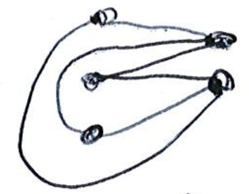
Un graphe non orienté est biparti si l'ensemble des sommets S peut être partitionné en deux sous-ensembles S_1 et S_2 (c-à-d. $S_1 \neq \emptyset, S_2 \neq \emptyset, S_1 \cap S_2 = \emptyset, S_1 \cup S_2 = S$) tels que toute arête a une extrémité dans chacun de S_1 et S_2

$\forall a \in A \; \exists s_1 \in S_1 \; \exists s_2 \in S_2, \; \delta(a) = \{s_1, s_2\}$

Un graphe non orienté simple est biparti complet s'il y a une arête joignant n'importe quel sommets de S_1 et S_2

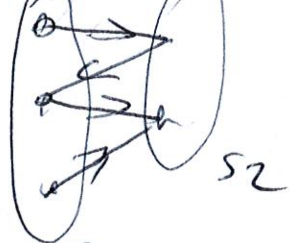
$\forall s_1 \in S_1 \; \forall s_2 \in S_2 \; \exists a \in A, \; \delta(a) = \{s_1, s_2\}$

On écrit $K_{m,n}$ pour le graphe biparti complet avec $|S_1| = m$ et $S_2 = |n|$



$K_{3,2}$

Un graphe orienté G est biparti si $f(G)$ l'est



Un graphe est planaire s'il peut être "dessiné" dans un plan euclidien

Les sommets sont des points de $\mathbb{R}^2$ ($S \subseteq \mathbb{R}^2$)

et les arcs/arêtes sont des arcs continus joignants les extrémités

$\forall a \in A \quad a : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ continue

$a(0) = \alpha(a)$, $a(1) = \beta(a)$ $\quad$ (ou $\{a(0), a(1)\} = \delta(a)$)

sans contenir de sommets à l'intérieur

$\forall a \in A \ \forall x \in]0,1[, \quad a(x) \notin S$

et deux arêtes distinctes ne s'intersectent pas, sauf éventuellement en leurs extrémités communes :

$\forall a_1, a_2 \in A, \ a_1 \neq a_2 \Rightarrow \forall x, y \in]0,1[, \quad a_1(x) \neq a_2(y)$

<u>Propriété</u>. On peut dessiner un graphe planaire de façon que les arcs/arêtes soient des segments de droite

$K_{3,2}$ $\qquad$ K_4

<u>Union disjointe de deux graphes</u>

$S \cap S' = \emptyset$
$A \cap A' = \emptyset$

$(S, A, \alpha, \beta) \uplus (S', A', \alpha', \beta') = (S \cup S', A \cup A', \alpha \cup \alpha', \beta \cup \beta')$

$(S, A, \delta) \uplus (S', A', \delta') = (S \cup S', A \cup A', \delta \cup \delta')$