Arbres et arborescences

Proposition. Soit G un graphe non orienté simple, avec $\text{card}\, S = n$

(a) Si G est connexe, alors $\text{card}\, A \geq n-1$.

(b) Si G est sans cycle, alors $\text{card}\, A \leq n-1$.

Preuve. Par récurrence sur n.

Si $n=1$, S est un singleton, A est vide, donc $\text{card}\, A = 0 = n-1$.

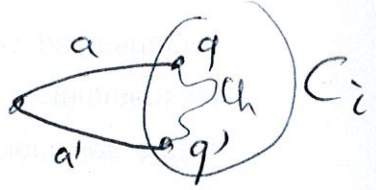
Supposons $n>1$ et la propriété vraie pour tout $m<n$. Soient $s \in S$, $S' = S \setminus \{s\}$, G' le sous-graphe de G engendré par S', et $C_1, \dots, C_t$ les composantes connexes de G'. Pour $i=1,\dots,t$, soit $A_i = \{a \in A \mid \delta(a) \subseteq C_i\}$ l'ensemble des arêtes dont les extrémités sont dans C_i.

(a) Comme $\text{card}\, C_i < n$, par récurrence on a $\text{card}\, A_i \geq \text{card}\, C_i - 1$. Comme G est connexe, pour $i=1,\dots,t$, p est relié par au moins une arête à un sommet de C_i. Donc

$$\text{card}\, A \geq t + \sum_{i=1}^{t} \text{card}\, A_i \geq t + \sum_{i=1}^{t} (\text{card}\, C_i - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \text{card}\, C_i = \text{card}\, S' = n-1$$

(b) Soit $i = 1, \dots, t$. Comme (C_i, A_i) n'a pas de cycle et $\mathrm{card}\, C_i < n$, par récurrence on a $\mathrm{card}\, A_i \leq \mathrm{card}\, C_i - 1$. Supposons qu'il y ait 2 arêtes a, a' reliant p à 2 sommets $q, q' \in C_i$ ($q \neq q'$ parce que G est simple). Comme (C_i, A_i) est connexe, il existe une chaîne Ch reliant q à q' ; mais alors $Ch\, q' a' p a q$ est un cycle, contradiction.

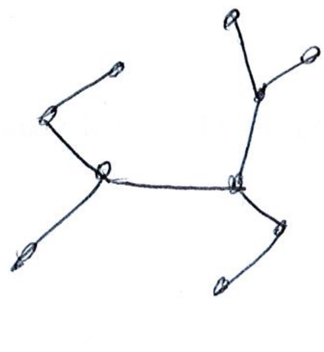


Donc il y a au plus une arête reliant p à C_i. D'où

$$\mathrm{card}\, A \leq t + \sum_{i=1}^{t} \mathrm{card}\, A_i \leq t + \sum_{i=1}^{t} (\mathrm{card}\, C_i - 1)$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \mathrm{card}\, C_i = \mathrm{card}\, S' = n - 1$$

<u>Définition</u> Un arbre est un graphe non orienté simple connexe et sans cycle



<u>Théorème</u> : soit G un graphe non orienté simple à n sommets. Les 6 énoncés suivants sont équivalents :

(1) G est un arbre

(2) G est connexe et a $n-1$ arêtes

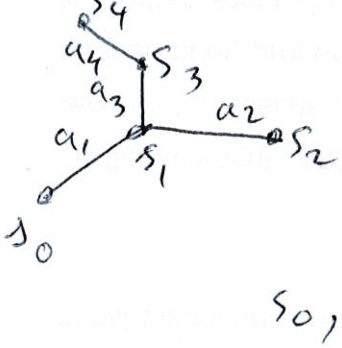
(3) G est sans cycle et a $n-1$ arêtes

(4) G est connexe, et en enlevant une arête il ne l'est plus

(5) G est sans cycle, et en ajoutant une arête, il en a un.

(6) Tout couple de sommets est relié par une et une seule chaîne sans pseudo-cycle de longueur 2.

<u>NB</u>. On peut toujours modifier une chaîne par ajout de pseudo-cycles.



s_0, a_1, s_1, a_2, s_2

ou

$s_0, a_1, s_1, a_3, s_3, a_3, s_1, a_2, s_2$

ou

$s_0, a_1, s_1, a_3, s_3, a_4, s_4, a_4, s_3, a_3, s_1, a_2, s_2$

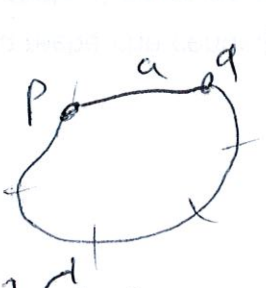
<u>Preuve</u> $(1) \Rightarrow (2)$, $(1) \Rightarrow (3)$: Par la proposition plus haut, G a $n-1$ arêtes.

(2) $\Rightarrow$ (4) En enlevant une arête, il n'y en a plus que $n-2$, donc le graphe n'est plus connexe par la proposition

(3) $\Rightarrow$ (5) En ajoutant une arête, il y en a n, donc le graphe aura un cycle par la proposition.

(4) $\Rightarrow$ (5) S'il y avait un cycle $s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n = s_0$, alors en enlevant a_1 le graphe resterait connexe : dans toute chaîne, remplacer
s_1, a_1, s_0 par $s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n = s_0$
s_0, a_1, s_1 par $s_0 = s_n, a_n, s_{n-1}, \dots, s_1$.
Donc il n'a pas de cycle. En rajoutant une arête a entre 2 sommets p et q, comme G est connexe, il existe une chaîne élémentaire et simple $p = s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n = q$ les joignant, donc $s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n, a, s_0$ seraient un cycle.

(5) $\Rightarrow$ (6) Pour $p, q \in S$, si on rajoute une arête a entre p et q, on obtient un cycle. Ce cycle contient a (parce que G n'en a pas). En enlevant a de ce cycle, il devient une chaîne reliant p et q, et il est dans G.
Donc il existe dans G une chaîne reliant p et q, il en existe donc une élémentaire et simple, C.
(utiliser la décomposition)



Soit C' une autre chaîne sans pseudo-cycle de longueur 2, reliant p à q. Comme C' n'a pas de cycle, c'est élémentaire et simple.

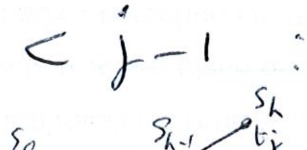
Si l'un de C ou C' a une arête n'apparaissant pas dans l'autre, alors cette arête n'apparaît qu'une fois dans la chaîne fermée obtenue par concaténation de C' et de l'inverse de C ; mais alors cette chaîne fermée contient un cycle (voir plus haut).

Donc C et C' ont les mêmes arêtes, et la même longueur.

$C = p = s_0, a_1, s_1, \ldots, s_{n-1}, a_n, s_n = q$

$C' = p = t_0, b_1, t_1, \ldots, t_{n-1}, b_n, t_n = q$

Soit h le plus petit $i > 0$ tel que $s_i \neq t_i$. Donc $s_j = t_j$ et $a_j = b_j$ pour $j < h$, $s_h \neq t_h$ et $a_h \neq b_h$. Il existe $j > h$ tel que $a_h = b_j$, ainsi $\{t_{h-1}, s_h\} = \{s_{h-1}, s_h\} = \{t_{j-1}, t_j\}$, donc $t_{h-1} = t_{j-1}$ ou t_j avec $h-1 < j-1$: C' a un cycle, contradiction.



On conclut qu'il faut que $C = C'$

(6) $\Rightarrow$ (1) Tout couple de sommet est relié [3y]
par une chaîne : donc G est connexe.
Si G avait un cycle $s_0, a_1, s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n = s_0$,
alors s_1, a_1, s_0 et $s_1, \dots, s_{n-1}, a_n, s_n$ sont
deux chaînes sans pseudo-cycles de
longueur 2 reliant s_1 à s_0, contradiction.
Donc G est sans cycle. G est un arbre $\boxed{\Xi}$

<u>Proposition</u> : Tout arbre a au moins 2
sommets de degré 1.

<u>Preuve</u>. $\sum_{s \in S} d(s) = 2 \operatorname{card} A = 2(\operatorname{card} S - 1)$

Comme G est connexe, $d(s) \geq 1$ pour tout $s \in S$.
S'il n'y avait qu'un sommet de degré 1,
on aurait $\sum_{s \in S} d(s) \geq 2(\operatorname{card} S - 1) + 1$ $\cancel{\ }$.
d° au moins 2 — nb de sommets de d° au moins 2

<u>Def</u>. Une forêt est un graphe non orienté
simple sans cycle. Ses composantes connexes
sont des arbres.

Dans une forêt, $\operatorname{card} S - \operatorname{card} A$ donne
le nombre de composantes connexes.

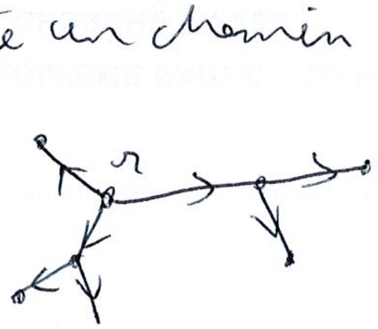
Théorème (Cayley, 1889). Soit S avec card $S = n$. Il y a n^{n-2} arbres ayant S comme ensemble de sommets.

Def. Soit G un graphe non orienté simple connexe. Un arbre couvrant de G est un graphe partiel de G qui est un arbre.

un arbre couvrant (parmi d'autres).

Arbre enraciné : on choisit un sommet r dans S, qu'on appelle racine.

Arborescence. Soit $r \in S$. Une arborescence de racine r est un graphe orienté G tel que $\gamma(G)$ est un arbre et $\forall s \in S$ il existe un chemin d'origine r et de but s.



A partir d'un arbre enraciné, on construit de façon unique une arborescence de même racine r.

Soient s_1 et s_2 deux sommets adjacents. On a une et une seule des deux possibilités suivantes :

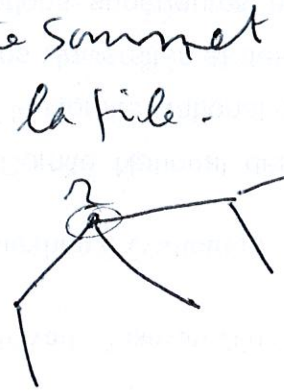
a) toute ~~chaîne~~ chaîne d'extrémités r et s_1, contient s_2 ;

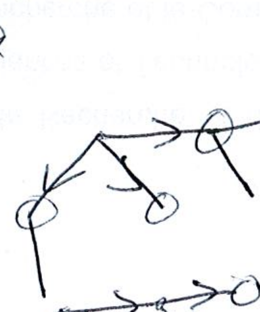
b) toute ~~chaîne~~ chaîne d'extrémités r et s_2 contient s_1.

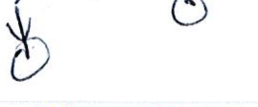
En a) on fait $s_2 \to s_1$, en b) $s_1 \to s_2$

Algorithme.

1) Mettre r dans la file
2) Répéter jusqu'à ce que la file soit vide :
   a) extraire le sommet s en tête de file ;
   b) ~~pour~~ toute arête non orientée incidente à s est transformée en arc d'origine s, et l'autre sommet incident à celle-ci est inséré dans la file.

0) 

1) 

2) 

3) fin.

Proposition Un graphe orienté est une arborescence de racine r SSI pour tout sommet s il y a un unique chemin de r à s.

Proposition Un graphe orienté est une arborescence de racine r SSI il est connexe, $d^-(r)=0$ et $d^-(s)=1$ pour tout sommet $s \neq r$

Un sommet avec $d^+(s)=0$ est appelé une feuille.

Pour un arc d'origine s_1 et de but s_2, on dit que s_1 est le père de s_2 et s_2 est le fils de s_1.

La profondeur d'un sommet est la longueur du chemin de r à s.

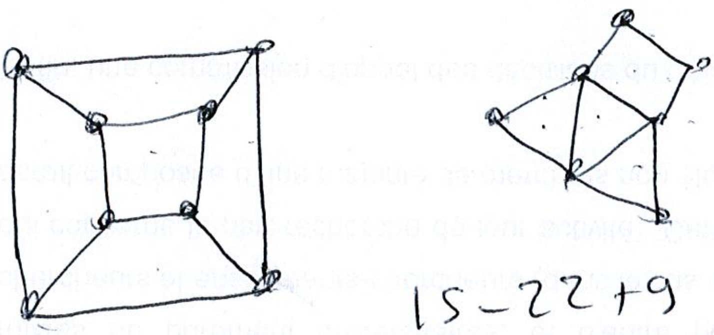
La hauteur de l'arborescence est la profondeur maximum de ses sommets

Représentation planaire

Formule d'Euler

Dans un graphe planaire, les sommets et arêtes délimitent des faces.

Le nombre de sommets
− le nombre d'arêtes
+ le nombre de faces
= le nombre de composantes connexes



15 sommets
22 arêtes
9 faces

15 − 22 + 9 = 2 composantes connexes.