

Graphes

Contrôle Terminal

Durée : 2 heures

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

(1) Degrés.

On considère un graphe non orienté simple (c.-à-d. sans boucles ni arêtes multiples) ayant n sommets, où $n \geq 2$.

- (i) Quel est le plus grand degré possible pour un sommet ? Justifiez.
- (ii) Peut-on avoir simultanément un sommet de degré 0 et un sommet de degré $n - 1$? Justifiez.
- (iii) Montrez qu'il y a deux sommets distincts de même degré.

(2) Flot maximum.

On a une classe d'élèves et un ensemble d'activités. Chaque élève indique les activités qui l'intéressent. On souhaite affecter les élèves à des activités en respectant les contraintes suivantes :

- (a) un élève est affecté uniquement à des activités qui l'intéressent ;
- (b) chaque élève est affecté à au maximum 2 activités ;
- (c) chaque activité se voit affecter au maximum 3 élèves.

On souhaite évidemment que la somme des affectations soit la plus grande possible.

Questions :

- (i) Expliquez comment ce problème peut se modéliser comme celui d'un flot maximal dans un graphe. Explicitez les sommets, les arcs et les capacités.
- (ii) On a 4 élèves : Anne, Bernard, Chantal et Didier, ainsi que 3 activités : judo, musique et théâtre. Les élèves ont indiqué les intérêts suivants :

Anne : judo, musique ;
Bernard : judo, musique ;
Chantal : judo, musique, théâtre ;
Didier : judo, théâtre.

Un enseignant a fait l'affectation suivante :

Anne, Bernard et Chantal feront du judo et de la musique ;
Didier fera du théâtre.

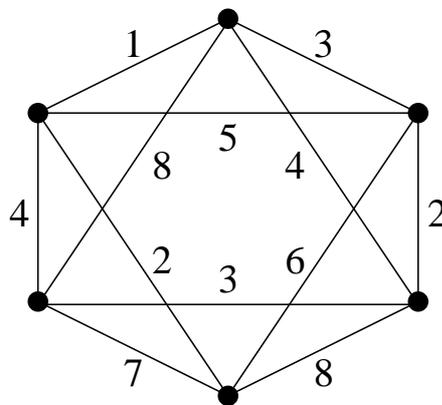
Cette affectation n'est pas optimale, il faut l'améliorer avec la méthode (de Ford-Fulkerson) vue en cours pour maximiser un flot. Pour cela vous devez :

- (i) donner le graphe des capacités et celui du flot ;
- (ii) construire le graphe des capacités résiduelles, trouver un chemin augmentant et donner le flot obtenu en ajoutant ce chemin augmentant.
- (iii) déterminer si le flot augmenté est maximum.

Finalement, expliquez brièvement ce que ce chemin augmentant réalise en termes d'affectations.

(3) Arbre couvrant de poids minimum.

Dans le graphe non orienté pondéré ci-dessous (où le poids de chaque arête est indiqué par le nombre à côté d'elle), construisez un arbre couvrant de poids minimum par l'algorithme de Prim. Le choix du sommet initial est libre. Il faut donner toutes les étapes de la construction.



(4) Arbres.

On considère un arbre dont tous les sommets sont de degré 1 ou 3.

- (i) Montrez que s'il y a m sommets de degré 3, alors le nombre de sommets de degré 1 est $m + 2$.
- (ii) Expliquez comment construire pour tout entier $m \geq 0$ un arbre ayant m sommets de degré 3 et $m + 2$ sommets de degré 1.