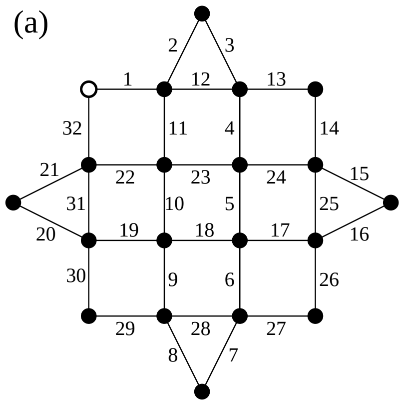
Université de Strasbourg — **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 Informatique S4 — **2013-2014, semestre de printemps**

Graphes

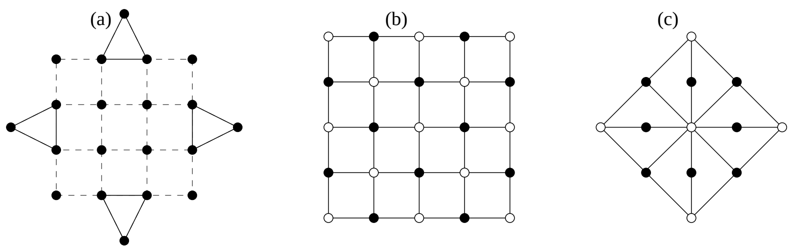
Contrôle Continu n°1

Corrigé

(1) Cycle eulérien.
Les graphes (b) et (c) ont plusieurs sommets de degré impair, donc ils n'ont pas de cycle eulérien. Le graphe (a) est connexe et a tous ses sommets de degré pair, donc il a un cycle eulérien. Nous donnons ci-dessous un exmple (il y en a d'autres) de cycle eulérien, où le sommet initial et terminal est indiqué en creux :



(2) Graphe biparti.
Le graphe (a) n'est pas biparti, car il a des cycles de longueur 3. Les graphes (b) et (c) sont bipartis, nous indiquons ci-dessous les sommets d'une partie sous forme de cercles creux ∘, et ceux de l'autre partie sous forme de disques pleins •, et l'on voit qu'une arête joint toujours deux sommets de parties opposées (un ∘ avec un •) :



(3) Degrés et cycles.
Première preuve : S'il n'y avait pas de cycle, le graphe serait une forêt, et ses composantes connexes seraient des arbres ; mais chacun de ces arbres a une feuille, qui est de degré 1, ce qui contredit le fait que tous les sommets sont de degré ≥ 2.

Deuxième preuve : On applique la formule sur la somme des degrés égale à deux fois le nombre d'arêtes :

$$2|A| = \sum_{s \in S} d(s) \geq \sum_{s \in S} 2 = 2|S| \quad .$$

Comme $|A| \geq |S|$, le graphe doit avoir un cycle, parce qu'on a vu en cours qu'un graphe sans cycle vérifie $|A| \leq |S| - 1$.

Troisième preuve : On va construire ce cycle (on utilise le fait que tout sommet est de degré ≥ 2). On choisit un sommet quelconque s_0, et une arête a_1 ayant une de ses extrémités s_0 ; soit s_1 l'autre extrémité de a_1. On pose $i = 1$ et on effectue l'itération suivante :

Répéter

incrémenter i de 1 (i++) ;

choisir a_i une arête différente de a_{i-1}, ayant une de ses extrémités s_{i-1} ;

soit s_i l'autre extrémité de a_i

Jusqu'à ce que s_i soit égal à un sommet précédent : pour $1 \leq j < i$, $s_i == s_j$.

Alors $s_j, a_{j+1}, \ldots, a_i, s_i$ est une chaîne fermée élémentaire (c.-à-d. sans répétition de sommets) ; par construction, deux arêtes successives sont distinctes, donc elle ne peut pas être un pseudo-cycle de longueur 2. Par conséquent c'est un cycle (c.-à-d. il n'y a pas de répétition d'arête).