

## Graphes

Contrôle Continu n°1, 10 mars 2015

**Durée : 1 heure**

Responsable : Prof. Christian RONSE

*Tous documents en papier autorisés mais non partagés*

*Calculatrices inutiles*

*Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

*Justifiez soigneusement vos réponses !*

**NB.** Les graphes seront toujours supposés **finis**, c.-à-d. avec un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arêtes.

### (1) Parité des degrés.

On considère un graphe non orienté à  $n$  sommets,  $n \geq 1$ .

- (i) Peut-on avoir un nombre impair de sommets de degrés impair ?
- (ii) Soit  $k$  un entier tel que  $0 \leq 2k \leq n$ . Montrer comment construire un graphe non orienté simple à  $n$  sommets ayant exactement  $2k$  sommets de degré impair. (*Indication* : partir du graphe complet  $K_n$  et enlever certaines arêtes, la solution dépend de la parité de  $n$ ).

### (2) Cycle unique.

On considère un graphe non orienté à  $n$  sommets,  $n \geq 1$ , *connexe* et *possédant exactement un cycle*.

- (i) Quelles arêtes peut-on enlever sans déconnecter le graphe ? Combien peut-on en enlever ?
- (ii) Combien d'arêtes le graphe a-t-il ?

### (3) Graphe eulérien par ajout.

Soit  $G$  un graphe orienté connexe. Montrer que si  $G$  n'est pas eulérien, alors on peut obtenir un graphe eulérien (c.-à-d. ayant un circuit eulérien) en rajoutant à  $G$  un sommet supplémentaire et des arcs dont les extrémités sont un sommet de  $G$  et ce nouveau sommet.