Université de Strasbourg — **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 Informatique et CMI S4 — **2016-2017, semestre de printemps**

Graphes

Contrôle Continu n°3, 5 mai 2017

Durée : 1 heure et 20 minutes
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

NB. *Dans un graphe orienté, l'arc d'origine x et de but y est écrit xy.*
Pour chaque question, il est permis (mais non demandé) de faire un dessin.

(1) Distances et arborescence depuis la racine par l'algorithme de Dijkstra.
On a un graphe orienté pondéré avec 6 sommets r, a, b, c, d, e et 9 arcs dotés chacun d'un poids, comme suit :

$$ra : 1 , \quad rb : 2 , \quad rc : 3 , \quad ad : 5 , \quad bd : 3 , \quad cd : 1 , \quad ae : 6 , \quad ce : 3 , \quad de : 1 .$$

Construire par l'algorithme de Dijkstra les distances de la source r à chaque sommet, ainsi que l'arborescence correspondante de racine r. Il faudra, outre le résultat final, détailler chaque étape, en y indiquant les mises à jour des distances et des relations père-fils dans l'arborescence, ainsi que de la file. L'arborescence peut être représentée soit par un dessin, soit par la liste des couples père-fils.

(2) Distance tronquée et algorithme de Floyd-Warshall.
Dans un graphe orienté pondéré, la longueur d'un chemin est la somme des poids de ses arcs, et la distance d'un sommet x à un sommet y, écrite $d(x, y)$, est la longueur minimum d'un chemin d'origine x et de but y s'il existe, elle est infinie sinon. Soit un nombre réel $M > 0$. On définit la distance tronquée par M, écrite d_M, en posant $d_M(x, y)$ égale au minimum de $d(x, y)$ et M, c.-à-d. $d_M(x, y) = d(x, y)$ si $d(x, y) < M$, et $d_M(x, y) = M$ sinon.

(i) Y a-t-il une transformation du graphe qui fasse que la distance de x à y devienne égale à $d_M(x, y)$?

(ii) Expliquer comment modifier l'algorithme de Floyd-Warshall, qui calcule tous les $d(x, y)$, de façon à obternir $d_M(x, y)$, et expliquer pourquoi cela marche.

(3) Flot maximum.
Un réseau de transport est formé des sommets a, b, c, d, e, f, s, p, où s est la source et p le puits, et des arcs

$$sa, \quad sb, \quad sc, \quad ad, \quad bd, \quad be, \quad ce, \quad cf, \quad dp, \quad ep, \quad fp,$$

où chaque arc est de capacité 1, sauf les arcs sa et fp qui sont de capacité 2. On a un flot donné par les arcs suivants, ayant chacun une valeur de flot égale à 1 :

$$sb, \quad sc, \quad bd, \quad ce, \quad dp, \quad ep.$$

(i) Donner la capacité résiduelles de chaque arc et de l'arc inverse de chacun.

(ii) Donner un chemin augmentant, avec sa valeur de flot.

(iii) Donner le flot augmenté.

(iv) Celui-ci est-il maximal ?