

## Graphes

Contrôle Continu n°1, 6 mars 2018

**Durée : 45 minutes**

Responsable : Prof. Christian RONSE

*Tous documents en papier autorisés mais non partagés*

*Calculatrices inutiles*

*Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé*

*Justifiez soigneusement vos réponses !*

**NB.** Les graphes seront toujours supposés **finis**, c.-à-d. avec un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arcs ou arêtes.

### (1) Graphe orienté, degrés entrants et sortants.

Un graphe orienté a l'ensemble de ses sommets répartis en deux types :

- (a) **Type A** : de degré entrant 1 et de degré sortant 2,  $d^-(s) = 1$  et  $d^+(s) = 2$ , il y a  $n$  sommets de ce type.
- (b) **Type B** : de degré entrant 2 et de degré sortant 1,  $d^-(s) = 2$  et  $d^+(s) = 1$ , il y a  $m$  sommets de ce type.

#### Questions :

- (i) Comparer  $n$  et  $m$ .
- (ii) Donner le nombre minimum d'arcs dont l'origine est de type A et le but est de type B. (*Indication* : regarder les degrés entrants et sortants dans le sous-graphe engendré par les sommets de type A.)

### (2) Graphe biparti eulérien.

On considère un graphe non orienté biparti  $G$ , avec les deux parties  $S_1$  et  $S_2$  de l'ensemble de sommets telles que toute arête a une extrémité dans  $S_1$  et l'autre dans  $S_2$ . On suppose  $G$  *simple* (sans arêtes multiples). Soient  $n = \text{card } S_1$  et  $m = \text{card } S_2$ , avec  $n \geq m$ .

#### Questions :

- (i) Si  $G$  a un cycle eulérien, quel est le nombre maximum d'arêtes de  $G$  quand  $n$  et  $m$  sont tous deux pairs ? Donner un exemple où ce maximum est atteint.
- (ii) Même question que (i) quand  $n$  impair et  $m = n$ .