

Graphes

Contrôle Continu n°1, 6 mars 2018

Durée : 45 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses !

NB. Les graphes seront toujours supposés **finis**, c.-à-d. avec un nombre fini de sommets et un nombre fini d'arcs ou arêtes.

(1) Graphe orienté, degrés entrants et sortants.

Un graphe orienté a l'ensemble de ses sommets répartis en deux types :

- (a) **Type A** : de degré entrant 1 et de degré sortant 2, $d^-(s) = 1$ et $d^+(s) = 2$, il y a n sommets de ce type.
- (b) **Type B** : de degré entrant 2 et de degré sortant 1, $d^-(s) = 2$ et $d^+(s) = 1$, il y a m sommets de ce type.

Questions :

- (i) Comparer n et m .
- (ii) Donner le nombre minimum d'arcs dont l'origine est de type A et le but est de type B. (*Indication* : regarder les degrés entrants et sortants dans le sous-graphe engendré par les sommets de type A.)

(2) Graphe biparti eulérien.

On considère un graphe non orienté biparti G , avec les deux parties S_1 et S_2 de l'ensemble de sommets telles que toute arête a une extrémité dans S_1 et l'autre dans S_2 . On suppose G *simple* (sans arêtes multiples). Soient $n = \text{card } S_1$ et $m = \text{card } S_2$, avec $n \geq m$.

Questions :

- (i) Si G a un cycle eulérien, quel est le nombre maximum d'arêtes de G quand n et m sont tous deux pairs ? Donner un exemple où ce maximum est atteint.
- (ii) Même question que (i) quand n impair et $m = n$.