

Graphes

Contrôle Continu n°1, 7 octobre 2020

Durée : 45 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones, tablettes, ordinateurs et appareils connectés éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses ! Soyez concis !

(1) Chemin fermé traversant les arêtes.

On considère un graphe non-orienté connexe. Montrer qu'il y a un chemin fermé passant exactement deux fois par chaque arête, une fois dans chaque sens.

Indication : on peut utiliser la récurrence sur le nombre d'arêtes, mais il est plus simple de transformer chaque arête en deux arcs d'orientations opposées.

(2) Graphe non orienté, composantes connexes et cycles.

Soit G un graphe non orienté simple (sans boucles ni arêtes multiples), soit S l'ensemble de ses sommets, et soit $p \in S$. Le sous-graphe engendré par $S \setminus \{p\}$ (obtenu en enlevant le sommet p et toutes les arêtes incidentes à p) a n composantes connexes H_1, \dots, H_n .

Questions :

- (i) Si G est connexe, que peut-on dire du degré de p ?
- (ii) Étant donné un cycle élémentaire C comprenant le sommet p , que peut-on dire des autres sommets de C par rapport aux ensembles H_1, \dots, H_n ?

(3) Degré minimum et maximum.

On a un graphe non orienté avec 7 sommets. Parmi les degrés des sommets, le minimum est 3 et le maximum est 5.

Questions :

- (i) Doit-on avoir au moins un sommet de degré 4 ?
- (ii) Donner le nombre minimum possible d'arêtes du graphe.
- (iii) Donner le nombre maximum possible d'arêtes du graphe.

Indication : utiliser le théorème des degrés.