

Graphes

Contrôle Continu n°2, 10 novembre 2020

Durée : 45 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones, tablettes, ordinateurs et appareils connectés éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses ! Soyez concis !

(1) Arbre couvrant minimum.

On a un graphe non orienté simple avec 5 sommets $0, 1, 2, 3, 4$, où deux sommets distincts i, j sont reliés par une arête de poids $12/|i - j|$ (par exemple, l'arête entre 1 et 4 est de poids $12/|1 - 4| = 12/(4 - 1) = 4$). Construire un arbre couvrant de poids minimum par l'algorithme de Prim, où le sommet initial (racine) est 0. Il faut donner toutes les étapes de la construction.

Décrire ensuite quels sont les différents choix possibles pour un arbre couvrant de poids minimum.

(2) Forêt bipartie.

Une forêt (union disjointe d'arbres) est-elle toujours un graphe biparti ? Expliquer.

(3) Forêt d'arborescences.

Un graphe orienté a 3 composantes connexes qui sont toutes des arborescences. Le nombre de sommets non-feuilles (de degré sortant non nul) est 10, et la somme de leurs degrés sortants est 22. Calculer le nombre de feuilles (sommets de degré sortant zéro).

Indication : utiliser le théorème des degrés entrants et sortants.

(4) Tri topologique.

On a le graphe orienté simple de sommets a, b, c, d, e, f, g , avec les arcs suivants (notés par le sommet origine suivi du sommet but) :

$$ab, ac, ae, bc, bf, ce, db, dc, df, fe.$$

Il n'a pas de circuit. Faire un tri topologique de ce graphe au moyen de l'algorithme basé sur le parcours en profondeur (le choix des racines et l'ordre de visite des voisins sortants d'un sommet sont libres). Il faut décrire les arborescences construites par le parcours, avec les valeurs de début et fin de chaque sommet, puis donner la liste triée des sommets.