

**UFR de Mathématique et Informatique**  
**L2 Mathématiques, option Informatique**

**Théorie des Graphes — 2005-2006**

*Contrôle Continu, 4 avril 2006*

*Durée: 1 heure*

*Documents et calculettes autorisés — Téléphones portables et ordinateurs interdits*

*Justifier soigneusement les réponses*

(1) On considère un arbre à  $n$  sommets, où  $n \geq 2$ . Pour  $k = 1, \dots, n - 1$ , soit  $m_k$  le nombre de sommets de degré  $k$  (NB: il n'y a pas de sommet de degré 0 ou  $\geq n$ ). Démontrer (en utilisant les théorèmes sur les degrés et sur le nombre d'arêtes) que

$$\sum_{k=3}^{n-1} (k-2)m_k = m_1 - 2 .$$

(2) Utiliser (1) pour démontrer (par induction) que si l'arbre n'a que 2 sommets de degré 1 ( $m_1 = 2$ ), alors il est réduit à une chaîne  $s_1, a_1, s_2, \dots, s_{n-1}, a_{n-1}, s_n$ , c.-à-d.  $S = \{s_1, \dots, s_n\}$  et  $A = \{a_1, \dots, a_{n-1}\}$  avec  $\delta(a_i) = \{s_i, s_{i+1}\}$  pour  $i = 1, \dots, n - 1$ .