

Contrôle continu

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Dans toute la suite \mathbb{F}_n est l'ensemble des fonction booléennes de \mathbb{B}^n dans \mathbb{B} où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, \mathcal{S}_f est le support de la fonction f (i.e. $\mathcal{S}_f = \{\varepsilon \in \mathbb{B}^n \mid f(\varepsilon) = 1\}$).

I. Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de monômes disjonctifs sur n variables est égal à 3^n .
2. Il existe un monôme conjonctif m tel que $\text{Card}(\mathcal{S}_m)$ est un nombre impair supérieur ou égal à 3.
3. Si $f, g \in \mathbb{F}_n$, alors $\mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g \subseteq \mathcal{S}_f \iff g$.
4. Pour toute fonction booléenne, tout monôme central est maximal.

II. Simplification

Simplifier la fonction booléenne suivante en utilisant le diagramme de Karnaugh ou la méthode de Quine :

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_4 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3x_4.$$

III. Fonctions autoduales

Soit $f \in \mathbb{F}_n$ on appelle duale de f la fonction f^* telle que

$$f^*(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)}.$$

Une fonction f est dite autoduale si $f^* = f$.

1. Calculer les duales des fonctions booléennes : $x \mapsto x$, $x \mapsto \bar{x}$, $(x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2$ et $(x_1, x_2) \mapsto \text{Nand}_2(x_1, x_2)$.
2. Donnez une fonction de \mathbb{F}_2 qui soit autoduale.
3. Montrer que pour toute fonction booléenne f on a : $(f^*)^* = f$.
4. Soit $f \in \mathbb{F}_n$. On considère l'application de \mathbb{B}^n dans \mathbb{B}^n définie par

$$\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \mapsto \bar{\varepsilon} = (\bar{\varepsilon}_1, \dots, \bar{\varepsilon}_n).$$

Montrer que f est autoduale si et seulement si elle vérifie

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{B}_n, (\varepsilon \in \mathcal{S}_f \iff \bar{\varepsilon} \notin \mathcal{S}_f).$$

5. Dédurre de la question précédente le nombre de fonctions autoduales dans \mathbb{F}_n .