Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Contrôle continu de Logique
Mercredi 17 novembre 2010

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

Dans toute la suite $\mathbb{F}_n$ est l'ensemble des fonction booléennes de $\mathbb{B}^n$ dans $\mathbb{B}$ où $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $\mathcal{S}_f$ est le support de la fonction f (i.e. $\mathcal{S}_f = \{\overrightarrow{\mathbf{x}} \in \mathbb{B}^n \mid f(\overrightarrow{\mathbf{a}}) = 1\}$).

1 Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de fonctions booléennes de $\mathbb{F}_n$ est égal à 2^{2^n}.
2. Si f et g sont des fonctions booléennes alors $\mathcal{S}_{f \Longrightarrow g} \subseteq \mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g$.
3. Toute expression booléenne non valide est insatisfiable.
4. Il existe une expression booléenne non valide est satisfiable.

2 Déduction naturelle

Montrer que les formules suivantes sont des théorèmes de la logique propositionnelle formalisée par la déduction naturelle :

1. $(A \Rightarrow B) \vee (A \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \vee C)$
2. $\neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

3 Fonctions booléennes symétriques

Rappel : Une permution de $\{1, 2, ..., n\}$ est une bijection de $\{1, 2, ..., n\}$ dans $\{1, 2, ..., n\}$.

Une fonction booléenne f de $\mathbb{F}_n$ est dite symétrique si pour toute permutation σ de $\{1, 2, ..., n\}$ $f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, ..., a_{\sigma(n)}) = f(a_1, a_2, ..., a_n)$ pour tout $(a_1, a_2, ..., a_n) \in \mathbb{B}^n$.
Par exemple, pour $n = 2$, f est symétrique si et seulement si pour tout $(a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$, $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$.

Notation : Soit $\overrightarrow{\mathbf{a}} = (a_1, a_2, ..., a_n)$, alors $|\overrightarrow{\mathbf{a}}|$ est le nombre d'occurrences de 1 dans le vecteur $\overrightarrow{\mathbf{a}}$.
Par exemple, pour $n = 5, |(0, 1, 1, 0, 1)| = 3$.

1. Donnez un exemple d'une fonction booléenne symétrique de $\mathbb{F}_2$.
2. Montrez que si f et g sont des fonctions symétriques, alors $f + g$, $f.g$ et $\neg f$ le sont aussi.
3. Montrez que pour une fonction symétrique de $\mathbb{F}_n$, pour tout $\overrightarrow{\mathbf{a}}, \overrightarrow{\mathbf{a'}} \in \mathbb{B}^n$ tels que $|\overrightarrow{\mathbf{a}}| = |\overrightarrow{\mathbf{a'}}|$, $\overrightarrow{\mathbf{a}} \in \mathcal{S}_f$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathbf{a'}} \in \mathcal{S}_f$.
4. Déduire de la question précédente, le nombre de fonctions symétriques de $\mathbb{F}_n$.
5. Montrez qu'il existe $n + 1$ éléments de $\mathbb{B}^n$ tels qu'une fonction symétrique de $\mathbb{F}_n$ est complètement caractérisée par ses valeurs sur ces $n + 1$ points.