

Les notes de cours et des travaux dirigés sont autorisées.

**Notations :**

- Dans toute la suite  $\mathbb{F}_n$  est l'ensemble des fonction booléennes de  $\mathbb{B}^n$  dans  $\mathbb{B}$  où  $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  et pour  $f \in \mathbb{F}_n$ ,  $\mathcal{S}_f$  est le support de la fonction  $f$  (i.e.  $\mathcal{S}_f = \{\vec{x} \in \mathbb{B}^n \mid f(\vec{x}) = 1\}$ ).
- Si  $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ , alors  $|\vec{a}|$  est le nombre d'occurrences de 1 dans le vecteur  $\vec{a}$ .  
Par exemple, pour  $n = 5$ ,  $|(0, 1, 1, 0, 1)| = 3$ .

## 1 Vrai/Faux

Dire pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse en justifiant vos réponses :

1. Le nombre de fonctions booléennes de  $\mathbb{F}_n$  est égal à  $2^{2^n}$ .
2. Si  $f$  et  $g$  sont des fonctions booléennes alors  $\mathcal{S}_{f \implies g} \subseteq \mathcal{S}_f \cup \mathcal{S}_g$ .
3. Toute expression booléenne non valide est insatisfiable.
4. Il existe une expression booléenne non valide est satisfiable.

## 2 Fonctions booléennes symétriques

**Rappel :** Une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  est une bijection de  $\{1, 2, \dots, n\}$  dans  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Une fonction booléenne  $f$  de  $\mathbb{F}_n$  est dite symétrique si pour toute permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$   $f(a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \dots, a_{\sigma(n)}) = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  pour tout  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$ .

Par exemple, pour  $n = 2$ ,  $f$  est symétrique si et seulement si pour tout  $(a_1, a_2) \in \mathbb{B}^2$ ,  $f(a_1, a_2) = f(a_2, a_1)$ .

1. Donnez un exemple d'une fonction booléenne symétrique de  $\mathbb{F}_2$ .
2. Montrez que si  $f$  et  $g$  sont des fonctions symétriques, alors  $f + g$ ,  $f.g$  et  $\neg f$  le sont aussi.
3. Montrez que pour une fonction symétrique de  $\mathbb{F}_n$ , pour tout  $\vec{a}, \vec{a}' \in \mathbb{B}^n$  tels que  $|\vec{a}| = |\vec{a}'|$ ,  $\vec{a} \in \mathcal{S}_f$  si et seulement si  $\vec{a}' \in \mathcal{S}_f$ .
4. Dédurre de la question précédente, le nombre de fonctions symétriques de  $\mathbb{F}_n$ .
5. Montrez qu'il existe  $n + 1$  éléments de  $\mathbb{B}^n$  tels qu'une fonction symétrique de  $\mathbb{F}_n$  est complètement caractérisée par ses valeurs sur ces  $n + 1$  points.