

Contrôle continu

Seules les notes de cours et de TD sont autorisées.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans n'importe quel ordre.

Dans toute la suite, $\mathbb{B} = \{0, 1\}$, \mathbb{F}_n est l'ensemble des fonctions booléennes de \mathbb{B}^n dans \mathbb{B} et pour $f \in \mathbb{F}_n$, $Supp(f) = \{\vec{\varepsilon} \in \mathbb{B}^n \mid f(\vec{\varepsilon}) = 1\}$ est le support de la fonction booléenne f .

I. Soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \overline{x_1 x_4 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4}$

1. Déterminez le support de la fonction booléenne $f \in \mathbb{F}_4$. En déduire la forme normale conjonctive disjonctive (respectivement disjonctive conjonctive) de f .
2. En utilisant la méthode de Karnaugh ou de Quine, calculez l'ensemble des monômes maximaux puis l'ensemble des monômes centraux de f .
3. Donnez une expression minimale de f comme somme de monômes.
4. Expliquer pourquoi il existe une seule réponse à la question précédente.

II. On considère le système formel $S = (\Sigma, F, A, R)$ où

- l'alphabet est $\Sigma = \{I\}$,
 - l'ensemble des formules bien formées est $F = \{(m, m') \mid m, m' \in \Sigma^*\}$ où $\Sigma^* = \{\epsilon, I, II, III, IIII, \dots\}$, c'est-à-dire que F est l'ensemble des couples de mots sur l'alphabet Σ (ϵ représente le mot ne contenant aucune lettre),
 - l'ensemble des axiomes est $A = \{(\epsilon, I), (I, \epsilon)\}$ et
 - l'ensemble des règles d'inférence est $R = \{r_1, r_2, r_3\}$ avec pour tout $m, n \in \Sigma^*$
 - $r_1 : (m, n) \vdash (mI, nI)$
 - $r_2 : (m, n) \vdash (mII, n)$
 - $r_3 : (m, n) \vdash (m, nII)$
1. Montrez que $(I, II), (II, I), (IIII, IIIII)$ sont des théorèmes dans le système formel S .
 2. Expliquez pourquoi (II, II) et (I, III) ne sont pas des théorèmes dans le système formel S .
 3. Montrer que si (m, n) est un théorème alors (n, m) l'est aussi.
 4. Trouver l'ensemble des théorèmes du système formel S .
 5. Justifier votre réponse à la question précédente.

III. Si Jacques n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit alors Pierre est meurtrier ou Jacques est menteur. Si Pierre n'est pas meurtrier, alors Jacques n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit et le crime a eu lieu après minuit. Si le crime a eu lieu après minuit, alors Pierre est meurtrier ou Jacques n'est pas menteur. Donc Pierre est meurtrier.

En utilisant la résolution dire si le raisonnement décrit dans ce texte est correct ?

Notations :

r : « Jacques n'a pas rencontré Pierre l'autre nuit »

p : « Pierre est meurtrier »

j : « Jacques est menteur »

c : « Le crime a eu lieu après minuit »

Indication : Traduisez les données de ce texte en calcul des propositions, en utilisant les variables propositionnelles r, p, j et c puis utilisez la résolution en utilisant la négation de la conclusion.