Département d'Informatique
LICENCE d'informatique 2ème année
Examen de Logique
juin 2009
Durée : 2h00

Les notes de cours et de travaux dirigés sont autorisées.

Satisfiabilité

Déterminer parmi les formules suivantes, celles qui sont valides, celles qui sont satisfiables et celles qui sont insatisfiables (justifier).

1. $A \wedge B \Rightarrow B \wedge A$
2. $((A \vee B) \wedge (B \vee A)) \Leftrightarrow A \wedge B$
3. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \wedge B \Rightarrow C)$

Correction

1. est valide donc satisfiable ($A \wedge B \Rightarrow B \wedge A \equiv \neg(A \wedge B) \vee (A \wedge B) \equiv \top$)
2. n'est pas valide ($A = \top$ et $B =\perp$ donne $\perp$) mais satisfiable ($A = B = \top$)
3. est valide (faire la table de vérité) donc satisfiable

Résolution avec variables

On considère les énoncés suivants :

1. Toutes les vaches regardent passer les trains.
2. Quiconque regarde passer les trains et n'est pas méchant, doit nécessairement être heureux.
3. Parmi les animaux de la ferme, aucun n'est méchant.
4. Il existe une vache qui n'est pas heureuse.

Montrer par la méthode de résolution avec variables que l'on peut en déduire la conséquence :
C. Il existe quelqu'un, ne faisant pas partie des animaux de la ferme, qui regarde passer les trains.

Indication : Exprimer les énoncés ainsi que la négation de la conséquence dans le calcul des prédicats, puis les mettre sous forme prénexe, ensuite éliminer les quantificateurs, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables (unification / coupure / simplification).

Correction

On définit les prédicats suivants :

m(x) x est méchant

r(x) x regarde passer les trains

h(x) x est heureux

v(x) x est une vache

f(x) x est un animal de la ferme

Le problème peut être formalisé en utilisant les formules suivantes :

1. $\forall x, v(x) \rightarrow r(x)$
2. $\forall x, (r(x) \wedge \neg m(x)) \rightarrow h(x)$

3. $\forall x, f(x) \rightarrow \neg m(x)$
4. $\exists x, v(x) \wedge \neg h(x)$

Pour la conclusion nous obtenons :
$\exists x, (\neg f(x)) \wedge r(x)$
La négation de la conclusion est donc :
$\forall x, f(x) \vee \neg r(x)$
Les formules sont déjà en forme prénexe.

Skolémisation :

1. $v(x) \rightarrow r(x)$
2. $(r(x) \wedge \neg m(x)) \rightarrow h(x)$
3. $f(x) \rightarrow \neg m(x)$
4. $v(a) \wedge \neg h(a)$ où a est une nouvelle constante

Mise sous forme de clauses :

1. $\neg v(x) \vee r(x)$
2. $\neg r(x) \vee m(x) \vee h(x)$
3. $\neg f(x) \vee \neg m(x)$
4. $v(a)$
5. $\neg h(a)$
6. $f(x) \vee \neg r(x)$

Résolution :

1-4 avec x :=a donne 7 : $r(a)$

2-5 avec x :=a donne 8 : $\neg r(a) \vee m(a)$

7-8 donne 9 : $m(a)$

3-6 donne 10 : $\neg m(x) \vee \neg r(x)$

9-10 avec x :=a donne 11 : $\neg r(a)$

7-11 donne la clause vide.

Jeu des allumettes

On dispose d'un nombre n d'allumettes ($n > 0$) sur une table. Les joueurs A et B jouent chacun leur tour et peuvent retirer de 1 à 3 allumettes de la table. Le joueur qui retire la dernière allumette a gagné.
Exemple de partie :
On dispose 12 allumettes. C'est au joueur A de commencer.

1. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 10
2. Le joueur B retire 1 allumettes, il en reste 9
3. Le joueur A retire 3 allumettes, il en reste 6
4. Le joueur B retire 2 allumettes, il en reste 4
5. Le joueur A retire 2 allumettes, il en reste 2
6. Le joueur B retire 2 allumettes, il n'en reste plus, le joueur B a gagné.

Nous allons étudier des systèmes formels qui tente de modéliser ce jeu. Soit E l'ensemble des joueurs qui contient seulement deux éléments : A et B. Le language est l'ensemble des triplets $E \times E \times \mathbb{N}^*$.
Convenons qu'un triplet (X, Y, n) signifie que le joueur X peut gagner de façon sûre si c'est au joueur Y de jouer et qu'il reste n allumettes sur la table. Par exemple la formule $(A, B, 4)$ signifie que le joueur A peut gagner de façon sûre si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 4 allumettes sur la table.

1. Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 4)$ est vraie ? pourquoi ?
2. Etant données nos conventions est-ce que la formule $(A, B, 5)$ est vraie ? pourquoi ?

3. Proposer un ensemble de formules qui expriment le fait que si c'est à A de jouer et qu'il reste moins de 3 allumettes alors il a gagné. Même question pour B.
4. Considérons le système formel suivant :

   Axiomes : $\begin{array}{l}(A,B,4)\\(B,A,4)\end{array}$ Règles : $\begin{array}{l}(A,B,n)\vdash(A,A,n+1)\\(A,B,n)\vdash(A,A,n+2)\\(A,B,n)\vdash(A,A,n+3)\end{array}$

   (a) Montrer que $(A,A,5)$ est un théorème de ce système.

   (b) La formule $(B,B,6)$ est-elle un théorème de ce système ? justifier.

   (c) Est-ce que ce système est correct ? c'est à dire est-ce que tous les théorèmes de ce système sont des formules vraies ? justifier.

   (d) Est-ce que ce système est complet ? c'est à dire est-ce que toutes les formules vraies sont des théorèmes de ce système ? justifier.
5. Est-ce que (A,B,n) implique que (B,B,n) ?

Correction

1. La formule (A,B,4) est vraie. En effet, si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 4 allumettes, quoi que fasse B, il restera au plus 3 allumettes au prochain tour et donc A pourra gagner.
2. Cette formule (A,B,5) est fausse. En effet, si c'est au joueur B de jouer et qu'il reste 5 allumettes et que B prend *une* allumette, alors c'est à A de jouer et il reste 4 allumettes donc d'après le même raisonnement que dans la question 1, B est gagnant. Donc A ne gagne pas à coup sûr.
3. $$\begin{array}{ll}(A,A,1) & (B,B,1)\\(A,A,2) & (B,B,2)\\(A,A,3) & (B,B,3)\end{array}$$
4. (a) On applique la première règle (avec n=4) au premier axiome.

   (b) $(B,B,6)$ n'est pas un théorème. En effet, si c'était un théorème la preuve aurait été obtenue par application d'une règle ou d'un axiome mais $(B,B,6)$ ne correspond pas aux axiomes et aucune règle ne s'applique.

   (c) Ce système est correct. En effet, l'ensemble des théorèmes de ce système $(\{(A,B,4),(B,A,4),(A,A,5),(A,A,6),(A,A,7)\})$ ne contient que des formules vraies.

   (d) Ce système n'est pas correct. En effet,
5. Non cette implication n'est pas correcte. En effet, (A,B,n) signifie que si c'est à B de jouer et qu'il reste n allumettes alors A gagne à coup sûr. Donc si (A,B,n) est vraie alors (B,B,n) est fausse car si A gagne à coup sûr alors B ne gagne pas à coup car il perd à coup sûr !