

Simplification des fonctions booléennes, ensembles dénombrables, ...

1 Simplification des fonctions booléennes

1.1 Diagramme de Karnaugh

1. Simplifier les expressions suivantes en utilisant la méthode de Karnaugh en pricisant à chaque fois les monômes maximaux et centraux :
 - (a) $x_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_2 + x_3$,
 - (b) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4$
et
 - (c) $\overline{x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2x_3x_4}$.

1.2 Méthode de Quine

2. En utilisant la méthode de Quine simplifier les expressions suivantes en pricisant à chaque fois les monômes maximaux et centraux :
 - (a) $\text{NAND}_2(x_2, \text{NOR}_2(x_1, x_3)) + x_2\bar{x}_4$,
 - (b) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$,
 - (c) $x_1x_2 + \bar{x}_2x_4 + x_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_4$ et
 - (d) $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4$.

2 Ensembles dénombrables

1. Construire une bijection entre l'ensemble des nombres pairs et \mathbb{N} .
2. Montrez que tout sous-ensemble infini de \mathbb{N} est dénombrable.
3. Construire une bijection entre \mathbb{Z} et \mathbb{N} .
4. Construire une bijection entre \mathbb{N}^2 et \mathbb{N} .
5. Montrer que pour tout ensemble dénombrable E , E^2 est dénombrable.
6. Montrez que pour tout ensemble E , il n'existe pas de bijection entre E et $\mathcal{P}(E)$ où $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E .
7. Dédurre de la question précédente, en utilisant un codage des nombres réels de $[0, 1[$, qu'il n'y a pas de bijection entre \mathbb{N} et \mathbb{R} .