

Calcul des propositions

1 Démonstrations

Dans cette partie utilisez le méta-théorème de la déduction, pour trouvez des démonstrations dans le système $CP0$ donné en cours :

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)))$;
- 2) $(p \rightarrow ((p \rightarrow q) \rightarrow q))$;
- 3) Le texte suivant donne un déduction qui est ou n'est pas correcte.

Traduire les arguments en logique propositionnelle à l'aide des lettres données puis vérifier si une telle déduction est correcte.

“Si le lion ne se cache pas, alors la chasse se termine bientôt. Si la chasse se termine bientôt, alors le lion est tué ou le chasseur est mangé par le lion. Le lion n'est pas tué. Donc, le chasseur est mangé par le lion ou le lion se cache.”

L : « le lion se cache »

B : « la chasse se termine bientôt »

K : « le lion est tué »

M : « le chasseur est mangé par le lion »

2 Complétude

On considère le système formel $CP0'$ construit à la manière de $CP0$ avec les connecteurs \neg et \rightarrow , et avec comme seul schéma d'axiomes :

$$Ax : (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow p)$$

et comme règle d'inférence :

$$p, p \rightarrow q \vdash q$$

Remarque : les parenthèses n'ont pour rôle que de préciser les regroupements et n'interviennent pas dans le système.

1 - Préciser la définition de ce système formel. Donner des définitions pour les connecteurs \vee et \wedge permettant de retrouver les équivalences standards.

On interprète ce système par l'algèbre de Boole standard.

2 - Est-ce que tout théorème de $CP0'$ est une tautologie?

3 - Montrer que l'ensemble $T_{CP0'}$ des théorèmes de $CP0'$ est égal à :

$$\{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow A) \mid A, B \in F_{CP0'}\} \cup \{(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \mid A, B \in F_{CP0'}\}$$

4 - Est-ce que toute tautologie de $F_{CP0'}$ est un théorème de $CP0'$?

5 - Le méta-théorème de déduction est-il valable pour ce système formel?

6 - Quelle est la réponse au problème de la décision pour $CP0'$?