Département d'Informatique
LICENCE 2ème année
Travaux Dirigés de Logique
Mercredi 3 décembre 2008

Calcul des prédicats

1 Syntaxe

Dans la logique des prédicats du premier ordre, on considère la formule suivante :

$$\forall x(\forall y((\exists z R(f(x,b), g(y,z))) \Longrightarrow (S(x,y) \vee T(z,a)))).$$

Quels en sont les symboles fonctionnels, les symboles prédicatifs, les variables et les constantes ?

Déterminer l'ensemble des variables libres et l'ensemble des variables liées dans les expressions suivantes. Effectuer ensuite les substitutions indiquées sur les variables libres (après avoir éventuellement renommé certaines variables).
(E_1) $\forall x \forall y \; (p(x,a,t) \Longrightarrow \exists t \; p(x,y,t))$; substitution de t par $f(x,y)$.
(E_2) $(\forall x \exists v \; (p(x,v) \Longrightarrow r(a)) \Longrightarrow \forall u \forall v \; p(t,b,f(x)))$; substitution de x par $f(g(t,v),u)$.
(E_3) $(\forall y \; (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x \; p(x,x))$; substitution de x par $f(x,y)$.

2 Formalisation

1 - Traduire en logique des prédicats du premier ordre toutes les assertions du « raisonnement » suivant :

Tout homme est un primate.
Les dauphins ne sont pas des primates.
Il y a des dauphins qui sont intelligents.
Donc, on ne peut pas être un homme et être intelligent.

2 - On considère les deux énoncés suivants :
(i) L'obtention du Prix Nobel par un chercheur du laboratoire implique que le directeur organisera une fête.
(ii) Pour chaque chercheur du laboratoire, son obtention du Prix Nobel implique que le directeur organisera une fête.

Exprimer ces deux énoncés dans le formalisme du calcul des prédicats, en supposant que l'univers des variables X est composé des chercheurs du laboratoire (il n'y a pas de prédicat « est un chercheur »).

3 Théorèmes de CP1

Montrer que dans CP1, on a les théorèmes suivants.
(i) $\vdash \forall x \; p(x) \Longrightarrow \forall y \; p(y)$
(ii) $\neg p(y) \vdash \neg(\forall x \; p(x))$
(iii) $\forall x \; p(x) \vdash \exists y \; p(y)$
(iv) $\vdash \exists x \forall y \; p(x,y) \Longrightarrow \exists x \; p(x,x)$

4 Tautologies

Indiquer pour chacune des formules suivantes, s'il s'agit d'une tautologie.
(f_1) $\forall x \exists y\ p(x,y) \Longrightarrow \exists x\ p(x,x)$
(f_2) $\exists x \forall y\ p(x,y) \Longrightarrow \exists x\ p(x,x)$
(f_3) $(\exists y \forall x\ (p(x,y) \Longrightarrow r(x))) \Longrightarrow \exists z\ r(z)$
(f_4) $\forall x \forall y\ (p(x,y) \vee p(y,x)) \Longrightarrow \forall x\ p(x,x)$
(f_5) $\forall x \exists y \forall z\ p(x,y,z) \Longrightarrow \exists y \forall z\ p(z,y,z)$
(f_6) $(\forall x\ (p(x) \Longrightarrow r(x)) \wedge \exists y\ \neg r(y)) \Longrightarrow \exists z\ \neg p(z)$

5 Modèles

On considère l'ensemble $\mathcal{A}$ comprenant les formules :
$(\mathcal{A}_1)$: $\forall x \forall y \forall z\ ((p(x,y) \wedge p(y,z)) \Longrightarrow p(x,z))$;
$(\mathcal{A}_2)$: $\forall x\ (p(a,x) \wedge p(x,b))$; a et b étant des constantes ;
$(\mathcal{A}_3)$: $\forall x\ p(x, f(x))$;
et la théorie (qu'on note encore $\mathcal{A}$) étendant CP1 en ajoutant ces trois formules aux axiomes.

1 - Proposer un modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$. Calculer, étape par étape, l'application $\mathcal{I}(B)$ de D dans $\{0,1\}$ associée à la formule B : $\forall y\ (p(x,y) \Longrightarrow p(x, f(x)))$.

2 - Montrer qu'il n'est pas vrai que : $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3 \models \exists x\ p(f(x), a)$. Pour cela, proposer un modèle $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{I}(\exists x\ p(f(x), a)) = 0$.