

Logique et Programmation Logique

Mise en forme des formules

(0) Negation

$$\begin{aligned} \neg(A \Rightarrow B) &\equiv (A \wedge \neg B) \\ \neg(A \vee B) &\equiv (\neg A \wedge \neg B) \\ \neg(A \wedge B) &\equiv (\neg A \vee \neg B) \\ \neg(A \Leftrightarrow B) &\equiv (A \text{ XOR } B) \\ \neg(\forall x A) &\equiv (\exists x \neg A) \\ \neg(\exists x A) &\equiv (\forall x \neg A) \end{aligned}$$

(1) Affaiblissement universel/existentiel

$$\forall x A(x) \quad \text{IMPLIQUE} \quad \exists y A(y)$$

(2) Ordre des quantificateurs

$$\begin{aligned} \forall x \forall y A(x, y) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \forall y \forall x A(x, y) \\ \exists x \exists y A(x, y) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \exists y \exists x A(x, y) \\ \exists x \forall y A(x, y) & \text{ IMPLIQUE } \forall y \exists x A(x, y) \end{aligned}$$

(3) Internalisation/externalisation des quantificateurs

On suppose que  $x$  n'est pas une variable libre de  $A$ .

$$\begin{aligned} \forall x (A \vee B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } A \vee (\forall x B(x)) \\ \forall x (A \wedge B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } A \wedge (\forall x B(x)) \\ \exists x (A \vee B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } A \vee (\exists x B(x)) \\ \exists x (A \wedge B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } A \wedge (\exists x B(x)) \end{aligned}$$

(4) Mise en facteur des quantificateurs

$$\begin{aligned} (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x)) & \text{ IMPLIQUE } \forall x (A(x) \vee B(x)) \\ (\forall x A(x)) \wedge (\forall x B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \forall x (A(x) \wedge B(x)) \\ (\exists x A(x)) \vee (\exists x B(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \exists x (A(x) \vee B(x)) \\ \exists x (A(x) \wedge B(x)) & \text{ IMPLIQUE } (\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x)) \end{aligned}$$

(5) Quantificateurs et implication

On suppose que  $x$  n'est pas une variable libre de  $B$ .

$$\begin{aligned} (\forall x A(x)) \Rightarrow B & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \exists x (A(x) \Rightarrow B) \\ (\exists x A(x)) \Rightarrow B & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \forall x (A(x) \Rightarrow B) \\ B \Rightarrow (\forall x A(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \forall x (B \Rightarrow A(x)) \\ B \Rightarrow (\exists x A(x)) & \text{ SI ET SEULEMENT SI } \exists x (B \Rightarrow A(x)) \end{aligned}$$