Université de Strasbourg **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 d'Informatique **Session de janvier 2009**

Logique

Contrôle Terminal

Durée : 2 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents en papier autorisés mais non partagés
Calculettes inutiles
Téléphones et appareils électroniques interdits

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Résolution avec variables.
On considère les énoncés suivants :

1. Marcus est un homme.
2. Marcus est un Pompéien.
3. Tous les Pompéiens sont Romains.
4. César est un dictateur.
5. Tous les Romains sont loyaux à César ou le détestent.
6. Un homme n'essaye d'assassiner un dictateur que s'il ne lui est pas loyal.
7. Marcus a essayé d'assassiner César.

Montrer par la méthode de résolution avec variables qu'on peut en déduire la conséquence :

C. Marcus déteste César.

Indication : Exprimer les énoncés ainsi que la négation de la conséquence dans le calcul des prédicats, puis les mettre sous forme prénexe, ensuite éliminer les quantificateurs, et enfin utiliser la méthode de résolution avec variables (unification / coupure / simplification).

(2) Prolog.
L'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD de deux nombres naturels (i.e., non-négatifs) se base sur la récursion :

pour $a > b > 0$, $pgcd(a, b) = pgcd(b, a\ MOD\ b)$,
où $a\ MOD\ b$ est le reste de la division de a par b
(donc $0 \leq a\ MOD\ b \leq b - 1$),

avec la condition limite :

pour $a > 0$, $pgcd(a, a) = pgcd(a, 0) = a$,
tandis que $pgcd(0, 0) = 0$.

Donner un code Prolog définissant un foncteur d'arité 3 appelé *pgcd*, tel que le but $pgcd(A, B, C)$ réussit si A, B, C sont des entiers non-négatifs et C est le PGCD de A et B.

(3) Quantification dans un ensemble.
Dans de nombreuses formules mathématiques, les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ portent sur des éléments d'un ensemble, ainsi on écrit $(\forall x \in Z)\ P$ pour dire : "pour tout élément x de Z, la formule P est satisfaite".

On suppose que $[x \in Z]$ est un prédicat ayant x et Z comme variables libres, et que pour une formule P, $(\forall x \in Z)\ P$ signifie $\forall x\ ([x \in Z] \Rightarrow P)$.

- *(i)* Exprimer la signification de $(\exists x \in Z)\ P$ en termes de "$\exists x$", "$[x \in Z]$", "P" et les connecteurs logiques, en supposant que par dualité $(\exists x \in Z)\ P$ doit être équivalent à $\neg\big((\forall x \in Z)\ \neg P\big)$, tout comme $\exists x\ P$ est équivalent à $\neg(\forall x\ \neg P)$.
- *(ii)* En utilisant les règles d'externalisation et de mise en facteur des quantificateurs vues en cours, montrer que $(\forall x \in Z)\ \big(A(x) \vee B\big)$ est équivalent à $\big((\forall x \in Z)\ A(x)\big) \vee B$.
- *(iii)* Montrer de même que $(\forall x \in Z)\ \big(A(x) \wedge B\big)$ est équivalent à $\big((\forall x \in Z)\ A(x)\big) \wedge \big((\forall x \in Z)\ B\big)$.