Université Louis Pasteur **UFR de Mathématiques et Informatique**
L2 d'Informatique **Session de septembre 2008**

Logique

Contrôle Terminal

Durée : 2 heures
Responsable : Prof. Christian RONSE
Tous documents et calculettes autorisés
Téléphones et autres moyens de communication interdits
Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Résolution sans variables.
Jane et Tarzan ont établi les règles de vie suivantes :

1 : Le dimanche, Jane chasse et Tarzan fait la cuisine.
2 : Pour que Tarzan fasse la cuisine, il faut que la chasse ramène du sanglier.
3 : La chasse ne peut pas ramener à la fois du sanglier et de l'antilope.
4 : La chasse ne peut ramener de l'antilope que le dimanche.
5 : Cheetah fait la vaisselle quand Jane chasse.
6 : Quand la chasse ramène du sanglier, Cheetah ne fait pas la vaisselle si elle ne reçoit pas des bonbons.

Problème : Les affirmations suivantes sont-elles des conséquences des règles ?

(a) Il est impossible que la chasse ramène de l'antilope.
(b) Cheetah reçoit des bonbons tous les dimanches.

Méthode :

— Exprimer chacun des faits possibles ("la chasse ramène de l'antilope", "Tarzan fait la cuisine", etc.) par une proposition (sans variables), qu'on codera par une chaîne de caractères (par exemple **jc** pour "Jane chasse").
— Traduire les règles 1 à 6 par un ensemble de clauses avec ces propositions.
— Idem pour la négation de (a).
— Idem pour la négation de (b).
— Combiner les clauses des règles 1 à 6 et de la négation de (a), appliquer successivement la coupure, et voir si cela donne la clause vide. Conclure si oui ou non (a) est une conséquence des règles 1 à 6.
— Idem pour (b) au lieu de (a).

(2) Système satisfaisable.
On considère le système suivant formé de 4 clauses sans variables :

$$S = \{(p \vee q),\ (q \vee r),\ (\neg p \vee \neg q),\ (\neg q \vee \neg r)\} \ .$$

(i) Donner l'ensemble des clauses obtenues à partir de S par applications successives de la coupure.

(ii) Le système S est-il satisfaisable ? Si oui, donner une interprétation satisfaite par S. Si non, expliquer pourquoi.

(3) Calcul des prédicats.

On considère les 3 énoncés suivants :

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} : &\quad \Big[\forall u \ \Big(p(u) \implies [\exists v \ q(v)]\Big)\Big] \\
\mathbf{B} : &\quad \Big[\forall w \ \Big(q(w) \implies [\exists x \ r(x)]\Big)\Big] \\
\mathbf{C} : &\quad \Big[\forall y \ \Big(p(y) \implies [\exists z \ r(z)]\Big)\Big]
\end{aligned}$$

Démontrer qu'à partir de **A** et **B** on peut déduire **C**. On a le choix entre trois méthodes :

— transformation de formules et utilisation d'axiomes et règles d'inférence ;

— raisonnement sur un modèle (une interprétation des formules) ;

— Skolemisation de **A**, **B** et $\neg$**C**, puis méthode de résolution avec variables.

(4) Fonctions booléennes.

Définissons les deux fonctions booléennes à 3 variables f et g comme suit :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \overline{\left(x_1 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\right)} + \left(x_1\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,x_3\right) \ , \\
g(x_1, x_2, x_3) &= \left(x_1 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\right) \ \cdot \ \left(x_1\,\overline{x_2} + \overline{x_1}\,x_3\right) \ .
\end{aligned}$$

Peut-on dire qu'on a toujours $f(x_1, x_2, x_3) \leq g(x_1, x_2, x_3)$? ou bien $f(x_1, x_2, x_3) \geq g(x_1, x_2, x_3)$?