AIDE-MEMOIRE DE MORPHOLOGIE A NIVEAUX DE GRIS

Christian RONSE, LSIIT UMR 7005 CNRS-ULP, Département d'Informatique de l'ULP

Les images à niveaux de gris sont considérées comme des fonctions $E \to \mathcal{T}$, où $E = \mathbb{R}^d$ ou $\mathbb{Z}^d$ représente l'espace des points et $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ ou $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}$ est l'ensemble des niveaux de gris; l'ensemble de ces fonctions est écrit $\mathcal{T}^E$. Cet ensemble est ordonné par la relation $\leq$, où $F_1 \leq F_2$ signifie que pour tout $p \in E$ on a $F_1(p) \leq F_2(p)$. Pour une famille F_i, $i \in \mathcal{I}$ de fonctions, on définit l'*enveloppe supérieure* $\bigvee_{i \in \mathcal{I}} F_i$ et l'*enveloppe inférieure* $\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} F_i$ comme suit:

$$\Big(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big)(p) = \sup_{i \in \mathcal{I}} F_i(p) \qquad \text{et} \qquad \Big(\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big)(p) = \inf_{i \in \mathcal{I}} F_i(p).$$

Pour une fonction $F \in \mathcal{T}^E$, on définit son *support* comme l'ensemble

$$\mathrm{supp}(F) = \{p \in E \mid F(p) > -\infty\}.$$

Soit $\mathcal{T}'$ l'ensemble des niveaux de gris finis de $\mathcal{T}$, c.a.d. $\mathcal{T}' = \mathcal{T} \setminus \{+\infty, -\infty\}$. Pour $F \in \mathcal{T}^E$, on définit l'*ombre* de F comme l'ensemble

$$U(F) = \{(h, v) \in E \times \mathcal{T}' \mid v \leq F(h)\}.$$

Pour $(h, v) \in E \times \mathcal{T}'$, la *translation* par (h, v) transforme $F \in \mathcal{T}^E$ en la fonction $F_{(h,v)}$, sa *translatée par* (h, v), définie par

$$F_{(h,v)}(p) = F(p - h) + v.$$

On définit également la fonction "impulsion" $f_{(h,v)}$ par

$$f_{(h,v)}(p) = \begin{cases} v & \text{si } p = h, \\ -\infty & \text{si } p \neq h. \end{cases}$$

Notons que $\left[f_{(h,v)}\right]_{(h',v')} = f_{(h+h',v+v')}$.

La somme et la différence de Minkowski $\oplus, \ominus$ sur $\mathcal{T}^E$ sont définies comme suit: pour deux fonctions $F, G : E \to \mathcal{T}$, on a

$$\begin{aligned} F \oplus G &= \bigvee_{(h,v) \in U(G)} F_{(h,v)}, \\ &= \bigvee_{(h,v) \in U(F)} G_{(h,v)}, \\ &= \bigvee \{f_{(h+h',v+v')} \mid (h,v) \in U(F), (h',v') \in U(G)\}; \\ F \ominus G &= \bigwedge_{(h,v) \in U(G)} F_{(-h,-v)}, \\ &= \bigvee \{f_{(h,v)} \mid G_{(h,v)} \leq F\}. \end{aligned}$$

On peut montrer que

$$(F \oplus G)(p) = \sup_{h \in E} \big(F(p-h) + G(h)\big) = \sup_{h \in \mathrm{supp}(G)} \big(F(p-h) + G(h)\big),$$

avec la convention que chaque fois que l'expression $F(p-h) + G(h)$ donne $+\infty - \infty$, on la pose égale à $-\infty$; de même

$$(F \ominus G)(p) = \inf_{h \in E} \big(F(p+h) - G(h)\big) = \inf_{h \in \mathrm{supp}(G)} \big(F(p+h) - G(h)\big),$$

avec la convention que chaque fois que l'expression $F(p+h)-G(h)$ donne $+\infty-\infty$, on la pose égale à $+\infty$.

Tant les images à niveaux de gris que les *fonctions structurantes* sont des fonctions $E \to \mathcal{T}$; étant donnée une fonction structurante G, les opérateurs $\delta_G : F \mapsto F \oplus G$ et $\varepsilon_G : F \mapsto F \ominus G$ de transformation d'images sont appelés la *dilatation par* G et l'*érosion par* G. On appelle $F \oplus G$ et $F \ominus G$ le *dilaté* et l'*érodé* de F par G.

L'inversion de niveaux de gris $\mathcal{T} \to \mathcal{T} : g \mapsto -g$ induit l'inversion des fonctions: $inv(F)(p) = -F(p)$, et cela donne la *dualité par inversion de niveaux de gris* entre la dilatation et l'érosion:

$$inv(F \oplus G) = inv(F) \ominus \widetilde{G} \qquad \text{et} \qquad inv(F \ominus G) = inv(F) \oplus \widetilde{G},$$

où $\widetilde{G}$ est défini par $\widetilde{G}(p) = G(-p)$.

Les propriétés de $\oplus$ et $\ominus$ dans le cas des ensembles se généralisent aux fonctions à niveaux de gris. On remplace $\subseteq$, $\bigcup$, $\bigcap$, et la complémentation d'ensembles par $\leq$, $\bigvee$, $\bigwedge$, et l'inversion de fonctions.

Dans le cas des niveaux de gris discrets, c.a.d. $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{Z}}$, on a un isomorphisme entre les opérations morphologiques sur les fonctions à niveaux de gris et celles sur les ensembles, appliquées aux ombres:

$$\begin{aligned}
F \leq G \iff & U(F) \subseteq U(G), \\
U(F_{(h,v)}) &= U(F)_{(h,v)}, \\
U\Big(\bigvee_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big) &= \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U(F_i), \\
U\Big(\bigwedge_{i \in \mathcal{I}} F_i\Big) &= \bigcap_{i \in \mathcal{I}} U(F_i), \\
U(F \oplus G) &= U(F) \oplus U(G), \\
U(F \ominus G) &= U(F) \ominus U(G).
\end{aligned}$$

Cependant, dans le cas des niveaux de gris continus, c.a.d. $\mathcal{T} = \overline{\mathbb{R}}$, ce n'est plus vrai, en particulier la 3e et la 5e équations ci-dessus (concernant l'ombre de l'enveloppe supérieure de fonctions et de la somme de Minkowski de deux fonctions) sont généralement fausses.

A tout élément structurant $B \subseteq E$ correspond la *fonction structurante plate* B^0 définie par $\mathrm{supp}(B^0) = B$ et $B^0(p) = 0$ pour tout $p \in \mathrm{supp}(B^0)$. Alors pour toute fonction $F \in \mathcal{T}^E$ on a

$$F \oplus B = F \oplus B^0 \qquad \text{et} \qquad F \ominus B = F \ominus B^0.$$

Donc la morphologie plate (images à niveaux de gris dilatées ou érodées par des éléments structurants qui sont des ensembles) s'intègre dans la morphologie à niveaux de gris.

Si la fonction F a ses niveaux de gris dans l'intervalle $[a, b]$, c.a.d. chaque $p \in E$ vérifie $a \leq F(p) \leq b$, et si la fonction structurante G satisfait la condition $\sup_{h \in \mathrm{supp}(G)} G(h) = 0$, alors $F \oplus G$ et $F \ominus G$ ont également leurs niveaux de gris dans l'intervalle $[a, b]$, c.a.d. chaque $p \in E$ vérifiera $a \leq (F \oplus G)(p) \leq b$ et $a \leq (F \ominus G)(p) \leq b$.