

TD4

Fonctions et calculabilité

1 Fonctions et machines de Turing

- 1- Rappelez les définitions des opérations d'addition et de multiplication en termes de fonctions primitives récursives.
- 2- Construisez précisément les machines de Turing vues en cours pour montrer que les fonctions primitives récursives sont calculables au sens de Turing.
- 3- En faisant de la composition de machines, construisez des machines de Turing réalisant l'addition et multiplication de deux entiers. Dans quelle mesure ces machines sont-elles dépendantes de la base de numération utilisée ?

2 Langages et fonctions

On considère l'alphabet $\Sigma = \{a, b\}$ et on va essayer de reconnaître des langages sur cet alphabet en utilisant des prédicats μ -récursif.

- 1- Comment "coder" l'alphabet Σ en termes d'entiers ? Comment représenter le mot vide ? et les autres mots ? On utilisera ce codage pour implanter les prédicats récursifs décidant certains langages.
- 2- Écrivez un prédicat primitif récursif reconnaissant le langage a^* (c'est-à-dire répondant 1 si le "mot" en entrée n contient que des a et 0 sinon).
- 3- Même question pour le langage $(a \cup b)^*ab(a \cup b)^*$.
- 4- Même question pour le langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contient un nombre impair de } a\}$.
- 5- Montrez que tout langage rationnel sur Σ^* est reconnaissable par une fonction μ -récursive (et même primitive récursive : dans le premier cas, on peut utiliser directement un théorème du cours, dans le deuxième, on pourra utiliser le fait que les langages rationnels sont les langages pouvant être engendrés par une grammaire algébrique linéaire à gauche ou à droite).
- 6- Que pensez-vous du langage $L = \{w \in \Sigma^* \mid w \text{ contient un nombre premier de } a\}$? Est-il reconnaissable par une fonction μ -récursive ?