Université Louis Pasteur
Département d'informatique

Licence d'informatique-semestre 6
année 2007/08

Théorie des langages et calculabilité

Contrôle terminal - Juin 2008

Durée : 2h. Le sujet comporte deux pages. Les notes de cours et de TD sont autorisées
Le barême est donné à titre purement indicatif.

1 Grammaires et preuves (*10 points*)

On considère la grammaire générale $G = (V, \Sigma, R, S)$ définie par $V = \{S, F, 0, 1\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$ et par les règles :

(1) $1S \to S0$
(2) $0S \to F1$
(3) $0F \to F0$
(4) $1F \to F1$
(5) $SS \to 1$
(6) $SF \to e$ (e représente le mot vide)

1- (1 pt) Montrez que pour tout mot $w \in \Sigma^*$, $S101S \Rightarrow_G^* w$ si et seulement si $w = 110$.

2- (3 pts) Montrez que pour tout mot $u \in \Sigma^*$ et tout mot $w \in V^*$, on a : $SuS \Rightarrow_G^* w$ implique les assertions suivantes

(i) $|w|_S + |w|_F = 2$ ou 0 (où $|w|_S$ indique le nombre d'occurences de S dans w)
(ii) w commence par S ou $w \in \Sigma^*$

3- (2 pts) Soient $u \in \Sigma^*$ et $w \in V^*$ tels que $SuS \Rightarrow_G^* w$, montrez que si v_1 et v_2 sont deux mots de V^* tels que $w \Rightarrow_G v_1$ et $w \Rightarrow_G v_2$, alors $v_1 = v_2$. Déduisez-en que pour tous mots u, w_1 et w_2 de Σ^*, on a : $SuS \Rightarrow_G^* w_1$ et $SuS \Rightarrow_G^* w_2$ entraîne $w_1 = w_2$.

4- (3 pts) Tout mot u de Σ^* représente l'écriture en base 2 d'un entier que nous noterons $\overline{u}$. Ainsi $\overline{1101}$ désigne l'entier 13 en écriture décimale.

Montrez que pour tous mots u, v et v_1 de Σ^*, on a : $SuS \Rightarrow_G^* SvSv_1$ implique que u est de la forme $u = vu_1$ avec $\overline{1v_1} = \overline{u_1} + 1$. Montrez de même que $SuS \Rightarrow_G^* SvFv_1$ implique que u est de la forme $u = vu_1$ avec $\overline{v_1} = \overline{u_1} + 1$.

5- (1 pt) Déduisez-en que pour tous mots u et w de Σ^*, on a : $SuS \Rightarrow_G^* w$ si et seulement si $\overline{w} = \overline{u} + 1$.

2 Un problème d'indécidabilité sur les automates à pile (*10 points*)

Rappels. On rappelle qu'un automate à pile M est un sextuplet $(K, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, F)$ où K est l'ensemble des états de M, Σ l'alphabet des symboles d'entrée, Γ l'alphabet des symboles de pile, s l'état initial, F l'ensemble des états finaux et Δ la relation de transition qui est un sous-ensemble de $(K \times \Sigma \cup \{e\} \times \Gamma \cup \{e\} \times K \times \Gamma \cup \{e\})$. Une configuration est un triplet (q, w, γ) ; la relation de transition Δ permet classiquement de définir la relation de transition $\vdash_M$ entre les confifurations : $(q, w, \gamma_1) \vdash_M (p, v, \gamma_2)$ si $w = \sigma v$, $(p, \sigma, \mu_1, q, \mu_2) \in \Delta$ et $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$, $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$. Un mot w est reconnu par M si et seulement si $(s, w, e) \vdash_M^* (f, e, e)$ avec $f \in F$. Le langage reconnu par M est l'ensemble des mots de Σ^* qui sont reconnus ; il est noté $L(M)$.

Dans cette partie, on veut démontrer précisément un résultat donné en cours et stipulant que la minimisation des automates à pile est un problème indécidable. On supposera connue l'indécidabilité du problème suivant : "Etant donné un automate à pile M, est-ce que $L(M) = \Sigma^*$?".

Les diverses réductions que vous utiliserez éventuellement, pourront être décrites en utilisant du pseudo-code dont vous justifierez la faisabilité en termes de machines de Turing.

1- (2 pts) Montrez que pour tout alphabet Σ, il existe un automate à pile qui reconnait Σ^*, et qu'on peut imposer à cet automate de n'avoir qu'un état.

Déduisez-en, en expliquant soigneusement, que le problème suivant est indécidable : “Etant donnés deux automates à pile, M_1 et M_2 est-ce que $L(M_1) = L(M_2)$?”

2- Inversement, on va montrer que le problème $\mathbb{P}$: “Etant donné un automate à pile M à un état, est-ce que $L(M) = \Sigma^*$? ” est décidable.

Soit $M = (\{p\}, \Sigma, \Gamma, \Delta, p, \{p\})$, un automate à un état.

a) (2 pts) Donnez un exemple non-trivial d’automate à pile reconnaissant le mot vide. Donnez une condition calculable nécessaire et suffisante pour que M accepte le mot vide. Vous expliquerez soigneusement pourquoi votre condition est calculable.

b) (1 pt) Montrez que le problème de savoir si M accepte ou non tous les mots de longueur inférieure ou égale à 1 est décidable.

c) (1,5 pt) Montrez que M reconnait tous les mots de longueur inférieure ou égale à 1, si et seulement si $L(M) = \Sigma^*$.

d) (1,5 pt) Déduisez-en que le problème $\mathbb{P}$ est décidable.

3- (2 pt) Montrez que le problème “Etant donné un automate à pile M, construire un automate à pile M' possédant un nombre minimal d’états et tel que $L(M) = L(M')$” est indécidable.