

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°2

Durée : 45 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Fonction μ -récursive.

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une fonction telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leq f(n)$. Soit $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction définie pour $m \in \mathbb{N}$ par $g(m) = \max\{n \mid f(n) \leq m\}$ (le plus grand n tel que $f(n) \leq m$).

- (i) La fonction g est-elle bien définie ? Que peut-on dire de $g(m)$ par rapport à m ?
- (ii) Donner une méthode de calcul de $g(m)$ utilisant une boucle FOR.
- (iii) Si f est μ -récursive, qu'en est-il de g ?

(2) Décidabilité.

On numérote les cases du ruban d'une machine de Turing, la case initiale avec le \triangleright est numérotée 0, la suivante 1, etc. On utilise l'alphabet Σ pour les mots en entrée d'une machine de Turing.

- (i) Montrer que le problème suivant est décidable : une machine de Turing M ayant en entrée un mot $w \in \Sigma^*$, donc la configuration initiale $(s, \triangleright \underline{\quad} w)$, passera-t-elle au moins une fois dans la case numéro 3 du ruban ? (Utiliser le TD.)
- (ii) Montrer que le problème suivant est indécidable : une machine de Turing M ayant en entrée un mot $w \in \Sigma^*$, donc la configuration initiale $(s, \triangleright \underline{\quad} w)$, passera-t-elle au moins deux fois, à des instants non consécutifs, dans la case numéro 3 du ruban ? (Montrer qu'il existe une certaine machine de Turing M — qui peut utiliser un alphabet plus grand que Σ — pour laquelle répondre à cette question revient à déterminer l'arrêt d'une autre machine de Turing M' sur un certain mot w' formé à partir de w .)