

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°3

Durée : 40 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculatrices inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Réduction polynomiale.

Rappel : Une clause de longueur n est une disjonction $x_{t_1}^{\varepsilon_1} \vee \dots \vee x_{t_n}^{\varepsilon_n}$, où x_{t_1}, \dots, x_{t_n} sont des variables booléennes, les exposants $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ valent 0 ou 1, avec $x^1 = x$ et $x^0 = \bar{x}$ (le complémentaire de x). Un ensemble de clauses est satisfiable s'il existe une interprétation vrai/faux des variables booléennes qui donne vrai pour chacune des clauses.

Montrer qu'on peut réduire polynomialement la satisfiabilité d'un ensemble de clauses de longueur n vers la satisfiabilité d'un ensemble de clauses de longueur $n+1$; en d'autres termes, qu'il existe une fonction f calculable en un temps polynomial qui transforme un ensemble \mathcal{C} de clauses, chacune de longueur n ,

$$\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_m\}, \quad \forall t = 1, \dots, m, \quad C_t = x_{t,1}^{\varepsilon_{t,1}} \vee \dots \vee x_{t,n}^{\varepsilon_{t,n}}, \quad \varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n} \in \{0, 1\},$$

en un ensemble $f(\mathcal{C})$ de clauses, chacune de longueur $n+1$,

$$f(\mathcal{C}) = \{D_1, \dots, D_p\}, \quad \forall t = 1, \dots, p, \quad D_t = x_{t,1}^{\varepsilon_{t,1}} \vee \dots \vee x_{t,n+1}^{\varepsilon_{t,n+1}}, \quad \varepsilon_{t,1}, \dots, \varepsilon_{t,n+1} \in \{0, 1\},$$

de sorte que \mathcal{C} soit satisfiable si et seulement si $f(\mathcal{C})$ est satisfiable.

Indication : on peut rajouter des variables booléennes supplémentaires.

(2) NP et union.

Soient L_1 et L_2 deux langages de classe NP. Montrer que leur union $L_1 \cup L_2$ est de classe NP.

(3) co-NP.

Soit co-NP la classe des langages complémentaires de ceux dans NP : pour $L \subseteq \Sigma^*$, L est co-NP si et seulement si $\bar{L} = \Sigma^* \setminus L$ est NP. Donner la relation entre les classes P, co-NP et EXP.