

Complexité et Calculabilité

Contrôle Continu n°3

Durée : 50 minutes

Responsable : Prof. Christian RONSE

Tous documents en papier autorisés mais non partagés

Calculettes inutiles

Téléphones et appareils électroniques éteints et rangés dans un sac fermé

Justifiez soigneusement vos réponses

(1) Algorithme NP.

Soit $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ une fonction calculable en temps polynomial telle que pour tout mot $w \in \Sigma^*$, chaque caractère $a \in \Sigma$ apparaissant dans w doit aussi apparaître dans $f(w)$, et le nombre d'occurrences de a dans w est inférieur ou égal au nombre d'occurrences de a dans $f(w)$; cependant l'ordre des caractères peut changer entre w et $f(w)$. Par exemple :

$f(\text{chien}) = \text{niche}$

$f(\text{chat}) = \text{tache}$

$f(\text{bar}) = \text{barbara}$

$f(\text{outré}) = \text{unharicotrouge}$

$f(\text{anna}) = \text{pasunenana}$

Donnez un algorithme non-déterministe polynomial pour résoudre le problème suivant :

— Étant donné un mot $m \in \Sigma^*$, existe-t-il un mot $w \in \Sigma^*$ tel que $m = f(w)$?

(2) Problème indécidable.

On numérote les cases de la bande successivement $0, 1, 2, \dots$, à partir de la case initiale (avec le symbole de début \triangleright) numérotée 0. Montrer que le problème suivant est indécidable :

Étant donnée une machine de Turing M à une bande, avec le mot vide en entrée — donc la configuration initiale $(s, \triangleright \sqcup)$ — au cours de l'exécution, M va-t-elle écrire un caractère dans une case de numéro impair ?

Indications : (1) vous pouvez vous déplacer à travers les cases de numéros pairs au moyen de doubles déplacements à gauche $\leftarrow\leftarrow$ ou à droite $\rightarrow\rightarrow$, et rappelez-vous la double action ; (2) vous pouvez utiliser les résultats d'indécidabilité énoncés sur la feuille distribuée en cours.