

## Traitement du Signal

*Durée : 3 heures*

Responsable : Prof. Christian RONSE

*Tous documents et calculettes autorisés*

*Justifiez soigneusement vos réponses!*

### (1) Filtres numériques

On considère des signaux échantillonnés dans le temps ; la valeur du signal  $x$  au temps  $t$  est indiquée  $x(t)$  ; ici  $t$  est un entier relatif (le pas d'échantillonnage temporel est posé égal à 1). Supposons qu'on veuille réaliser un filtre numérique produisant à partir du signal d'entrée  $x$  un signal de sortie  $y$  donné par l'équation

$$y(t) = x(t+2) + x(t+1) + x(t) + x(t-1) + x(t-2).$$

- (i) Ce filtre est-il à réponse impulsionnelle finie ou infinie ? Est-il causal ?
- (ii) Si on construit un dispositif physique mettant en oeuvre un tel filtre, quel est l'instant minimum  $t'$  auquel on pourra avoir la valeur  $y(t)$  ?
- (iii) Dessinez le diagramme d'un circuit réalisant ce filtre, avec  $y(t)$  sortant au temps  $t'$  mentionné en (ii). Ce circuit utilisera uniquement des additionneurs et multiplicateurs de signaux, et des délais d'une unité de temps.
- (iv) Si on sait que pour tout  $t \in \mathbb{Z}$  on a  $|x(t)| \leq M$  (où  $M > 0$ ), que peut-on dire de  $y(t)$  ?

### (2) Modulation

On sait qu'une ligne téléphonique ne transmet pratiquement pas les basses fréquences. Mais on l'utilise pour transmettre des messages d'ordinateurs, qui constituent des signaux contenant tant des hautes que des basses fréquences.

- (i) Expliquez pourquoi on utilise la modulation pour transmettre un tel signal.
- (ii) Considérons les deux formes suivantes de modulation (pour une fréquence de modulation  $f_m$ ) :
  - (a) *Modulation sinusoidale* : On transmet le signal  $M$  donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t].$$

- (b) *Modulation à bande latérale unique (BLU)* : On transmet le signal  $M$  donné par

$$M(t) = S(t) \cdot \cos[2\pi f_m t] - S^*(t) \cdot \sin[2\pi f_m t],$$

où  $S^*$  est le signal déphasé de  $-\pi/2$  pour les fréquences positives, c.à.d.

$$\mathcal{F}(S^*)(\nu) = \begin{cases} -i \mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu > 0, \\ 0 & \text{pour } \nu = 0, \\ +i \mathcal{F}(S)(\nu) & \text{pour } \nu < 0. \end{cases}$$

Il est clair que la modulation à bande latérale unique est plus difficile à mettre en oeuvre que la modulation sinusoidale. Pourquoi l'utilisera-t-on ? Donnez un avantage de la modulation à bande latérale unique, et expliquez le sur un exemple concret.

### (3) Analyse de Fourier

Donner la transformée de Fourier de la fonction  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $F(x) = e^{-|x|}$ . (Conseil : décomposer cette fonction en la partie pour  $x < 0$  et celle pour  $x \geq 0$ .)

### (4) Convolution par analyse de Fourier

Soit  $\sigma > 0$ ; on définit la *Gaussienne* d'écart-type  $\sigma$  comme la fonction  $G_\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  donnée par

$$G_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right].$$

On peut montrer que la transformée de Fourier  $\mathcal{F}(G_\sigma)$  de  $G_\sigma$  vérifie

$$\mathcal{F}(G_\sigma)(\nu) = \exp[-2(\pi\sigma\nu)^2].$$

Utilisez cette information et les propriétés de la transformée de Fourier pour obtenir la convolution de  $G_{\sigma_1}$  par  $G_{\sigma_2}$  pour  $\sigma_1, \sigma_2 > 0$ . (Attention : un calcul direct par la formule de convolution risque d'être horriblement compliqué!)

### (5) Information

Une ligne de communication informatique de type A utilise un câble dont la bande de fréquences utiles est de 2kHz à 16kHz, et elle coûte 100F par semaine. Une ligne de type B utilisant un câble à bande de fréquences utiles de 8kHz à 38kHz coûte 200F par semaine. Que vaut-il mieux faire : payer 2 lignes de type A, ou une ligne de type B ?

### (6) Modulation en amplitude

Dans le système de transmission radio AM par modulation en amplitude, le message radio est multiplié par une onde sinusoïdale porteuse de la fréquence associée à la radio. Donc le signal transmis est

$$S(t) \cdot \cos[2\pi f_r t],$$

où  $S$  est le signal à transmettre aux auditeurs (parole ou musique), et  $f_r$  la fréquence de la radio. On suppose que  $S$  est filtré en passe-bas, de façon à n'avoir aucune fréquence supérieure à 20kHz (de toute manière, l'oreille humaine n'entend pas les fréquences au-delà de 20kHz). Quel est l'écart minimum entre les fréquences  $f_{r_1}$  et  $f_{r_2}$  de deux radios différentes pour ne pas avoir d'interférences entre les signaux transmis par les deux ?

### (7) Série de Fourier

Donner la série de Fourier de l'onde rectangulaire  $R_\alpha$  de largeur variable  $\alpha$  et de période 1, donnée par la formule:

$$R_\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 \leq x < \alpha, \\ 0 & \text{pour } \alpha \leq x \leq 1, \end{cases}$$

où  $0 < \alpha < 1$ .