



Stage ou T.E.R. printemps/été 2020 :

Le problème de l'aiguille de Buffon

Nicolas Magaud (magaud@unistra.fr)

Contexte

Le système Coq¹ est un assistant de preuves dédié à la fois aux mathématiques et à l'informatique [2]. Il permet notamment de décrire formellement des théories mathématiques et de construire des démonstrations de théorèmes s'appuyant sur ces théories. Il fonctionne de manière interactive. L'utilisateur construit *interactivement* ce qu'il croit être une preuve du théorème et le système vérifie *automatiquement* que la preuve construite démontre effectivement le théorème considéré.

Objectifs

On s'intéresse au problème de l'aiguille de Buffon [1]. Il s'agit d'un des 100 théorèmes référencés de la liste [4] qui peut être vu comme un *benchmark* pour valider la généricité d'un système de démonstration formelle comme Coq.

Énoncé Supposons que l'on laisse tomber une petite aiguille sur une feuille de papier réglée. Quelle est la probabilité que l'aiguille tombe dans une position telle qu'elle traverse l'une des droites ?

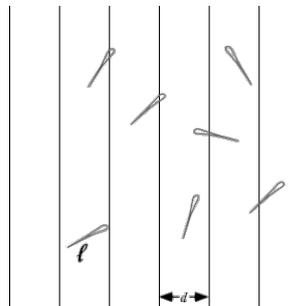


FIGURE 1 – Exemple de configuration (extrait de la bibliothèque en ligne MathWorld [3])

Dans un premier temps, on s'attachera à comprendre le résultat énoncé dans ce théorème et à le reproduire de manière expérimentale à l'aide des outils informatiques actuels.

Théorème Si une petite aiguille de longueur l est envoyée sur du papier réglé dont les droites sont régulièrement espacées d'une distance $d \geq l$, alors la probabilité que l'aiguille se place dans une position telle qu'elle coupe l'une des droites est exactement :

$$p = \frac{2 l}{\pi d}$$

1. <http://coq.inria.fr>

Dans un deuxième temps, on cherchera à identifier les briques de base nécessaires à la formalisation de l'énoncé en Coq ainsi que les résultats mathématiques nécessaires à la preuve de celui-ci (notamment les définitions et les propriétés liées aux probabilités).

Références

- [1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, Nicolas Puech, and Karl Heinrich Hofmann. *Raisonnements divins : quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer, Paris, Berlin, Heidelberg, 2006. Trad. de la 3e éd. anglaise : Proofs from the book.
- [2] Yves Bertot and Pierre Castéran. *Interactive Theorem Proving and Program Development, Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions*. Springer, 2004.
- [3] Wolfram MathWorld. Buffon's needle problem. available at <http://mathworld.wolfram.com/BufonsNeedleProblem.html>.
- [4] Freek Wiedijk. Formalizing 100 theorems. <http://www.cs.ru.nl/~freek/100/>.