Stage été 2020 :
Géométrie projective et espaces projectifs finis

Nicolas Magaud (magaud@unistra.fr)

La géométrie projective est une approche de la géométrie permettant de capturer les notions de *perspective* et d'*horizon*. En 2D, cela revient à faire l'hypothèse que 2 droites quelconques sont toujours concourantes. En 3D, cela revient à dire que 2 droites coplanaires se coupent toujours.

La géométrie projective peut être modélisée par un système d'axiomes très simple. Dans ce cas, on peut facilement prouver que certains espaces finis (contenant un nombre fini de points et de droites) vérifient bien les axiomes de la géométrie projective [3].

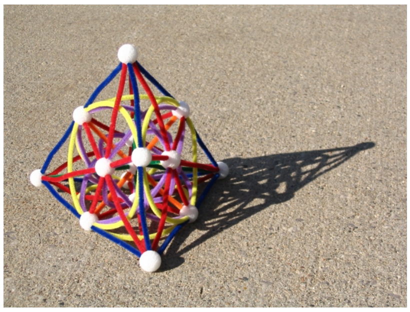

FIGURE 1 – pg(3,2) : extrait de la page web `http://homepages.wmich.edu/ drichter/projectivespace.htm`

Dans le cadre de ce travail, nous étudierons les espaces projectifs pg(3,2) et pg(3,3). L'espace pg(3,2) contient 15 points et 35 droites et l'espace pg(3,3) contient 40 points et 130 droites. Une fois que l'on a prouvé formellement avec Coq [2] que ces espaces vérifient bien les axiomes de la géométrie projective [1], on s'intéresse à leur décomposition en *spreads* et *packings*.

Un *spread* est une partition des points en droites disjointes. Dans pg(3,2), il existe 56 spreads différents (constitué de 5 lignes chacun). Tous ces spreads sont isomorphes, ce qui signifie que l'on peut construire une collinéation (une bijection qui respecte la relation d'incidence) entre 2 de ces spreads. Un packing de pg(3,2) est une partition des 35 droites en 7 spreads disjoints contenant chacun 5 droites. Il a 240 packings répartis en deux classes dans pg(3,2).

L'objectif du stage est double. Dans un premier temps, on construira à partir de la relation d'incidence, tous les spreads et tous les packings de pg(3,2). Cela pourra se faire avec un programme C++ adapté. Il faudra également construire toutes les collinéations permettant de passer d'un spread à l'autre. Dans un second temps, il faudra générer la description en Coq de ces objets et construire comme des fonctions en Coq les collinéations permettant de passer d'un spread à un autre. Si le temps le permet, nous pourrons étudier comment généraliser ce travail au cas de pg(3,3).

Références

[1] David Braun, Nicolas Magaud, and Pascal Schreck. Formalizing Some "Small" Finite Models of Projective Geometry in Coq. In Jacques Fleuriot, Dongming Wang, and Jacques Calmet, editors, *Proceedings of Artificial Intelligence and Symbolic Computation 2018 (AISC'2018)*, number 11110 in LNAI, pages 54–69, Sept. 2018.

[2] Coq development team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, Version 8.7.1*, 2018.

[3] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalizing Projective Plane Geometry in Coq. In Thomas Sturm, editor, *Post-proceedings of ADG'2008*, volume 6301 of *LNAI*. Springer, 2008.