Stage ou T.E.R. printemps/été 2021 :
Géométrie projective et espaces projectifs finis

Nicolas Magaud (magaud@unistra.fr)

La géométrie projective est une approche de la géométrie permettant de capturer les notions de *perspective* et d'*horizon*. En 2D, cela revient à faire l'hypothèse que 2 droites quelconques sont toujours concourantes. En 3D, cela revient à dire que 2 droites coplanaires se coupent toujours.

La géométrie projective peut être modélisée par un système d'axiomes très simple. Dans ce cas, on peut facilement prouver que certains espaces finis (contenant un nombre fini de points et de droites) vérifient bien les axiomes de la géométrie projective [3].

Figure 1 – Une maquette physique du plus petit espace projectif fini pg(3,2) : extrait de la page `http://homepages.wmich.edu/~drichter/projectivespace.htm`

Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons aux *petits* plans ou espaces projectifs finis de la forme pg(2,n) ou pg(3,n). Dans un article récent [1], nous avons décrit formellement dans l'assistant de preuves Coq [2] les espaces pg(2,3), pg(3,2) et pg(3,3). L'espace projectif est représenté *physiquement* dans la figure 1. Comme cela est synthétisé dans la figure 2, l'espace pg(3,2) contient 15 points et 35 droites et l'espace pg(3,3) contient 40 points et 130 droites. Le nombre de points et de droites de ces espaces croit très rapidement avec le second argument n. Décrire de tels espaces nécessite de construire l'ensemble des points, l'ensemble des droites ainsi que la relation d'incidence entre les points et les droites.

Afin de pouvoir travailler de manière homogène sur les plans et espaces projectifs finis pg(n,q) avec $n = 2$ ou $n = 3$ et avec q un entier plus grand que 3 [a], nous souhaitons générer automatiquement en Coq la spécification de ces espaces (l'ensemble des points, l'ensemble des droites et la relation d'incidence) au moyen d'un procédé de construction algébrique utilisant les corps finis sous-jacents. En 2D, les plans affines connus proviennent généralement de F^2, où F est un corps, avec un système de coordonnées. Des plans projectifs peuvent être construits à partir de F^3 en utilisant un système de coordonnées homogènes. Les espaces de Fano proviennent du corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Dans ce projet, il s'agira de proposer un programme dans le langage de votre choix permettant de générer automatiquement des fichiers Coq contenant les descriptions formelles de ces espaces. Les spécifications formelles de pg(2,2), pg(2,3) et pg(3,2) sont déjà écrits dans Coq et elles serviront de références pour vérifier que le procédé de génération est bien correct. On utilisera ensuite cet outil pour décrire des espaces comme pg(2,5), pg(2,7) ou pg(3,4), dont il n'est pas réaliste d'écrire la spécification à la main.

---

a. qui soit premier ou une puissance d'un nombre premier

	point(s)	droite(s)	plan(s)
`pg(2,2)`	7	7	1
`pg(2,3)`	13	13	1
`pg(2,4)`	21	21	1
`pg(2,5)`	31	31	1
`pg(3,2)`	15	35	15
`pg(3,3)`	40	130	40

FIGURE 2 – Nombres de points, droites et plans pour les plus petits plans et espaces projectifs.

Références

[1] David Braun, Nicolas Magaud, and Pascal Schreck. Formalizing Some "Small" Finite Models of Projective Geometry in Coq. In Jacques Fleuriot, Dongming Wang, and Jacques Calmet, editors, *Proceedings of Artificial Intelligence and Symbolic Computation 2018 (AISC'2018)*, number 11110 in LNAI, pages 54–69, Sept. 2018.

[2] Coq development team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, Version 8.12.0*, 2020.

[3] Nicolas Magaud, Julien Narboux, and Pascal Schreck. Formalizing Projective Plane Geometry in Coq. In Thomas Sturm, editor, *Post-proceedings of ADG'2008*, volume 6301 of *LNAI*. Springer, 2008.