

# Appel à projet interne Icube : Transformations affines discrètes pour la représentation du continu

Nicolas Magaud, Loïc Mazo, Marie-Andrée Da Col

février 2014

## 1 Titre bref du projet/Acronyme

— TRADICONT

## 2 Titre long

— Transformations Affines Discrètes pour la représentation du Continu

## 3 Mots-clés

— géométrie discrète, transformations linéaires, calcul réel exact, preuves formelles, Coq

## 4 Coordinateur

— Nicolas MAGAUD, MCF Université de Strasbourg, IGG

## 5 Axes transverses concernés

— CS : Calcul Scientifique

— IRMC : Imagerie et robotique médicales et chirurgicales

## 6 Participants

Nom, prénom	Statut	Équipe
MAGAUD Nicolas	MCF	IGG
MAZO Loïc	MCF	MIV
DA COL Marie-Andrée	MCF	MIV

## 7 Résumé

L'utilisation de transformations affines ou linéaires – les rotations, symétries, homothéties, translations, etc. – est une opération courante en traitement d'image. Ces transformations sont associées à des matrices à coefficients réels. Parce que les nombres flottants ne peuvent pas coder les nombres réels, mais seulement un nombre fini de rationnels, les implantations des transformations affines ont le plus souvent des propriétés algébriques (bijectivité, ...), topologiques (connexité, ...) et géométriques (conservation de la distance, ...) différentes des transformations qu'elles ont sensées représenter. Notre projet se propose de décrire, implanter et prouver une représentation en machine des transformations affines basée sur la droite d'Harthong-Reeb qui est isomorphe à l'ensemble des réels mais ne requiert que des calculs sur les entiers.

## 8 Description scientifique du projet

**Objectifs scientifiques** Pouvoir calculer de manière exacte avec des nombres réels est fondamental en informatique, notamment en informatique graphique pour tous les calculs géométriques. Un moyen de faire du calcul réel exact est d'utiliser un modèle discret du continu comme la droite d'Harthong-Reeb

[CWF+12]. Ainsi on peut travailler et calculer en utilisant uniquement des entiers et en observant les valeurs calculées à l'échelle de précision souhaitée.

Les applications quasi-affines [CBC09] permettent de représenter les transformations affines ou linéaires, comme par exemple des rotations discrètes [NKPT13]. Ces transformations sont représentées par des matrices à coefficients rationnels. On va utiliser la droite d'Harthong-Reeb pour décrire des transformations linéaires réelles en passant par des suites de transformations linéaires rationnelles. Une fois ces nouvelles applications définies, on pourra travailler avec l'assistant de preuve Coq pour prouver formellement certaines de leurs propriétés. On s'intéressera aux propriétés algébriques (bijectivité par exemple), topologiques (connexité) ou géométriques (conservation de distances) et notamment à leur évolution en fonction des différentes échelles d'observation.

**Approche envisagée** La droite d'Harthong-Reeb est une droite (continue), dont on peut prouver qu'elle est isomorphe à  $\mathbb{R}$ . Elle est construite à partir d'un type d'entiers particuliers, potentiellement infinis : les entiers de Laugwitz-Schmieden qui sont en fait des suites de nombres entiers. Les suites constantes d'entiers représentent les nombres usuels alors que les suites strictement croissantes représentent des nombres spéciaux qui n'appartiennent pas à  $\mathbb{Z}$  et sont des éléments-clés pour la construction de cette droite.

Le modèle numérique basée sur la droite d'Harthong-Reeb permet donc de construire des approximations (aussi près que l'on veut) de transformations continues. Dans ce cadre, on considérera des applications quasi-affines à coefficients dans la droite d'Harthong-Reeb. On cherchera à établir certains critères de convergence sur la suite des applications quasi-affines observées aux différentes échelles possibles.

Une première phase serait de travailler à la représentation graphique de ces applications quasi-affines définies sur la droite d'Harthong-Reeb. En effet, lorsqu'on représente graphiquement une courbe réelle (par exemple un cercle) en utilisant le processus d'arithmétisation proposée dans le formalisme de la droite d'Harthong-Reeb, nous avons besoin de deux dimensions afin de représenter les points aux différentes échelles (voir Fig. 1). Mais les structures liées aux applications quasi-affines (bassins attracteurs, pavages) [AC07] nécessitent déjà deux dimensions, il en faudrait donc une troisième pour les visualiser (animation, représentation de différents plans,...)

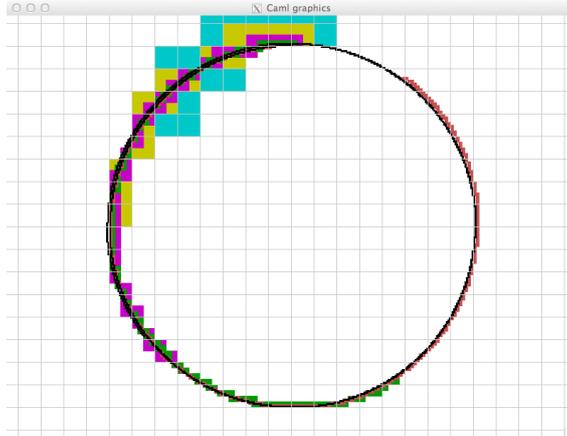


FIGURE 1 – Représentation d'un cercle discret à différentes échelles.

Dans une deuxième phase, on s'intéressera à la modélisation des applications quasi-affines dans l'assistant de preuve Coq. Cette modélisation s'appuiera sur les résultats obtenus dans [MCF10] sur la formalisation en Coq de la droite d'Harthong-Reeb et de ses propriétés. L'étude des applications quasi-affines, telle qu'elle a été menée jusqu'à présent, revient à se placer à une échelle donnée dans la droite d'Harthong-Reeb. Il s'agira donc de *modéliser*, *vérifier* et *reprogrammer* cette étude afin d'en déduire des résultats sur les applications à coefficients dans la droite d'Harthong-Reeb (par exemple : comment évoluent les bassins attracteurs ou les pavages d'une échelle à l'autre ?)

**Originalité** La droite d’Harthong-Reeb permet de faire du calcul réel exact dans un cadre qui est bien adapté à la géométrie discrète. Cela facilitera la description et l’implantation des transformations linéaires dans ce contexte. De plus, ce formalisme est déjà décrit en Coq, ainsi la description formelle des transformations linéaires dans ce contexte s’en trouvera facilitée.

**Positionnement dans le contexte national et international** Ce projet s’inscrit dans la continuité d’une collaboration entre les Universités de Poitiers et Strasbourg. Sur les aspects preuves et modélisation du calcul réel exact et sur la droite d’Harthong-Reeb, les auteurs développent des liens avec l’Université de Radboud Universiteit Nijmegen (Bas Spitters) sur le calcul exact et les preuves formelles sur les représentations des réels.

**Complémentarité des participants au projet** Nicolas Magaud est un spécialiste de la formalisation de théories mathématiques en Coq. De plus, il a une connaissance approfondie du modèle du continu qu’est la droite d’Harthong-Reeb. Il a d’ailleurs décrit formellement cette droite en Coq et prouvé ses propriétés en collaboration avec Laurent Fuchs de l’Université de Poitiers. Marie-Andrée Da Col et Loïc Mazo sont tous les 2 des spécialistes de la géométrie discrète.

## Références

- [AC07] Eric Andrès and Marie-Andrée Jacob-Da Col. Transformations affines discrètes. In David Coeurjolly, Annick Montanvert, and Jean-Marc Chassery, editors, *Traité IC2-Hermès : Géométrie discrète et images numériques*, chapter 7, pages 169–186. Hermès, 2007.
- [CBC09] David Coeurjolly, Valentin Blot, and Marie-Andrée Jacob-Da Col. Quasi-affine transformation in 3-d : Theory and algorithms. In Petra Wiederhold and Reneta P. Barneva, editors, *IWCIA*, volume 5852 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 68–81. Springer, 2009.
- [CWF+12] Agathe Chollet, Guy Wallet, Laurent Fuchs, Eric Andres, and Gaëlle Largeteau-Skapin. Foundational Aspects of Multiscale Digitization. *Theor. Comput. Sci.*, 466 :2–19, 2012.
- [MCF10] Nicolas Magaud, Agathe Chollet, and Laurent Fuchs. Formalizing a Discrete Model of the Continuum in Coq from a Discrete Geometry Perspective. In *Automated Deduction in Geometry 2010*, 2010. Accepted for presentation at the conference. An extended version is under consideration for publication in a journal.
- [NKPT13] Phuc Ngo, Yukiko Kenmochi, Nicolas Passat, and Hugues Talbot. Combinatorial structure of rigid transformations in 2d digital images. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(4) :393–408, 2013.

## 9 Budget demandé et dépenses envisagées

Il s’agit de financer un stage de master 2 (le coût est calculé pour un étudiant du master ISI Informatique et Sciences de l’Image qui se déroulera en alternance dès la rentrée 2014/2015) ainsi que des déplacements (visite de chercheurs de l’Université de Poitiers spécialistes de la droite d’Harthong-Reeb et de ses applications en géométrie discrète, notamment Laurent Fuchs et Eric Andrès). Il est également prévu un déplacement en conférence à l’issu du projet pour présenter les résultats obtenus.

Action	Coût (euros)	Remarques
stage M2 ISI	436 euros × 9 mois = 3924	stage de début sept. à fin août (12 mois) , avec 12 semaines de cours (3 mois) à déduire
invitation chercheurs	1000	2 visites d’une durée d’une semaine
mission en conférence	700	fin 2015 - début 2016, par exemple à DGCI (Discrete Geometry for Computer Imagery)
<b>Total</b>	<b>5624 euros</b>	

**Cofinancements** En parallèle, Nicolas Magaud a répondu à l’appel à projets *Bourses de mobilité 2014* du GDR GPL afin d’obtenir un financement pour un séjour d’une semaine à Poitiers pour travailler avec Laurent Fuchs sur les aspects *formalisation et preuve* en Coq de la droite d’Harthong-Reeb.