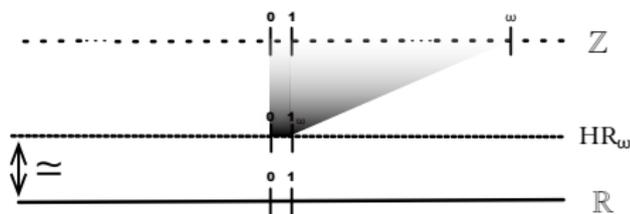


- Contexte
 - Calcul réel exact : la droite d'Harthong-Reeb
Un modèle discret du continu (n'utilise que des entiers)
 - Transformations linéaires :
rotations, symétries, homothéties décrites par les applications quasi-affines (AQAs)
- Objectifs
 - Modélisation de ces transformations linéaires en calculant avec la droite d'Harthong-Reeb
 - Description formelle et preuves en Coq

Calcul réel exact avec la droite d'Harthong-Reeb (I)

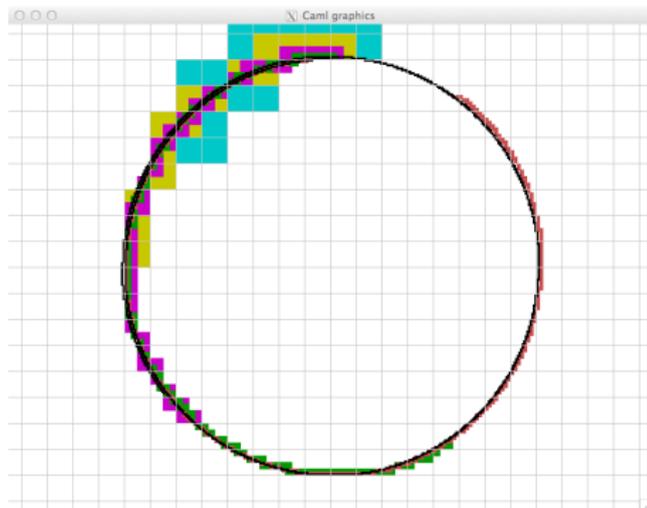
- Modèle du continu basé uniquement sur les entiers
- Possibilité de travailler à différentes échelles
- Analyse non-standard : un nombre *infiniment grand* ω
- $\mathcal{HR}_\omega = \{X \in \mathbb{Z}_\Omega, \exists n \in \mathbb{N}, |X| \leq n\omega\}$



- *Intuitivement*, « \mathbb{R} , c'est \mathbb{Z} vu de loin. »

Calcul réel exact avec la droite d'Harthong-Reeb (II)

- Processus de calcul (Ω -arithmétisation)
- Exemple : représentation à différentes échelles d'un cercle



- Couleurs = échelles de calcul
(bleu, jaune, rose, vert, rouge, noir, . . .)

- Un exemple d'Application Quasi-Affine (AQA)
 - Rotation d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$: matrice 2×2 à coefficients réels !

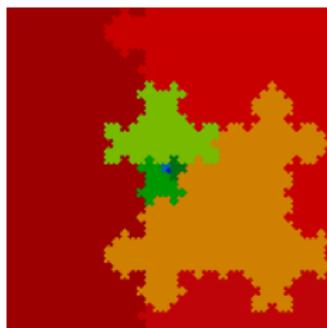
$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

- Approximation à différentes échelles dans \mathcal{HR}_ω
 - Avec des coefficients entiers
 - Calcul de la représentation au rang $n = 100$ avec SAGE

$$\begin{pmatrix} 633825300114114700748351602688 & -1097817622920238380819884895108 \\ 1097817622920238380819884895107 & 633825300114114700748351602688 \end{pmatrix}$$

- $\omega_{100} = 2^{100} = 1267650600228229401496703205376$
- $\frac{109781762292023838081988489510}{1267650600228229401496703205376} \approx \sin(\pi/3)$

- Représentation visuelle d'une AQA avec un seul point fixe



- Les AQAs aux différentes échelles
 - Visualisation des AQAs aux différentes échelles ($> 2D$)
 - Conservation des propriétés de la matrice réelle de départ (bijectivité, connexité, etc.) par la version discrétisée
 - sur quels critères ?
 - à partir de quelle échelle ?
 - cohérence aux différentes échelles ?

- Expérimentations
 - Visualisation des applications quasi-affines à différentes échelles (animation 2D)
 - Etude expérimentale des propriétés usuelles :
bijektivité, connexité, conservation de distance, etc.
 - Critères (conditions suffisantes pour avoir ces propriétés)
- Socle déjà formalisé en Coq
 - Une construction non-standard de la droite d'Harthong-Reeb basée uniquement sur des entiers
 - La correspondance avec les réels constructifs de Coq
- Travail de formalisation
 - Description en Coq des applications quasi-affines
 - Preuves de propriétés et de critères de correction

- Positionnement

- Axes transverses de Icube

- Calcul scientifique (CS)

- ex : les problèmes multi-échelles

- Imagerie et Robotique Médicale et Chirurgicale (IRMC)

- ex : applications au recalage d'images acquises par IRM

- Contexte national (transformations affines en 3D)

- Eric Andrès, Laurent Fuchs, Gaëlle Largeteau (Poitiers)

- Yukiko Kenmochi (ESIEE -Paris)

- Nicolas Passat (Reims)

- David Cœurjolly (Lyon)

- Contexte international (Calcul réel exact en Coq)

- Bas Spitters et al. (Nijmegen)

- Complémentarité

- Combinaison entre spécialistes de la géométrie discrète et spécialistes des preuves formelles.

