

Stage de recherche

David Braun sous la tutelle de Marie-André Jacob-Da Col, Nicolas Magaud et Loïc Mazo

Interface de construction et manipulation des Ω -AQAs

Sommaire

Contexte et problématique

Théorie et formalisation

- Formalisation AQA
- Etude des pavés d'une AQA
- Dynamique d'une AQA
- La droite d'Harthong-Reeb
- Formalisation Ω -AQA

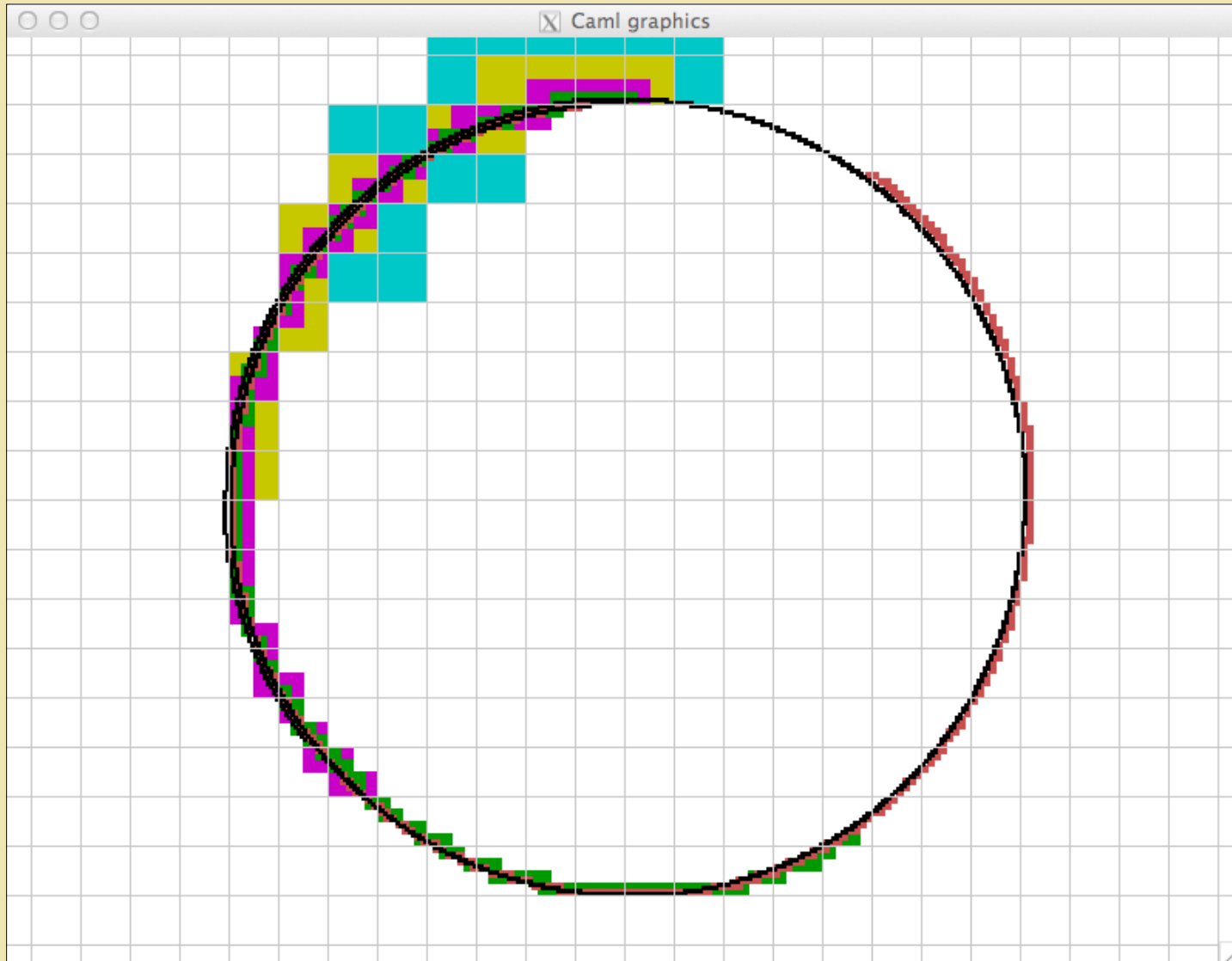
Résultats et application

- Application existante
- Mes résultats
 - Utilisateur
 - Bassins
 - Pavés

Conclusion et perspectives

Références

Contexte



Problématique

Développer une application qui traite et affiche les Ω -AQAs selon plusieurs paramètres pour déterminer des leurs propriétés inhérentes.

- Cette problématique s'inscrit dans le cadre du projet "Transformation affines discrètes pour la représentation du continu" actuellement traité au sein de l'Icube (Marie-Andrée Da Col, Nicolas Magaud et Loïc Mazo) en collaboration avec l'université de Poitiers.

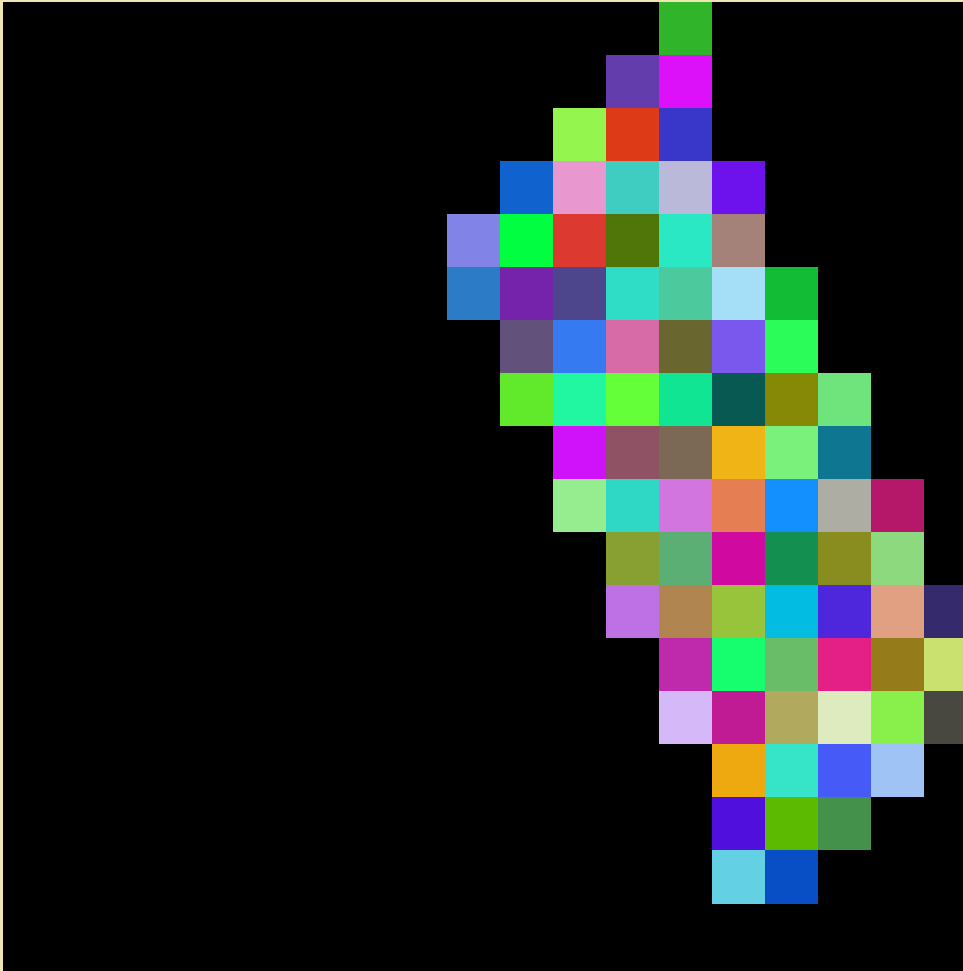
Formalisation AQA

Une application quasi-affine est une transformation de \mathbb{Z}^2 dans lui-même définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \left[\frac{ax + by + e}{\omega} \right] \\ y' = \left[\frac{cx + dy + f}{\omega} \right] \end{array} \right\}$$

Où a, b, c, d, e, f et ω sont des entiers, ω positif et $[\]$ représente la partie entière

Etude des pavés d'une AQA



Cas réel : L'image réciproque d'un point (x,y) par l'application affine de matrice A et de vecteur v est un point réel (x',y')

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

C'est donc l'intersection de deux droites réelles.

Cas discret : Deux équations de droites discrètes de largeur ω .

Etude des pavés d'une AQA

Intersection peut être **vide**, égale à **un point** ou un **ensemble de points**.

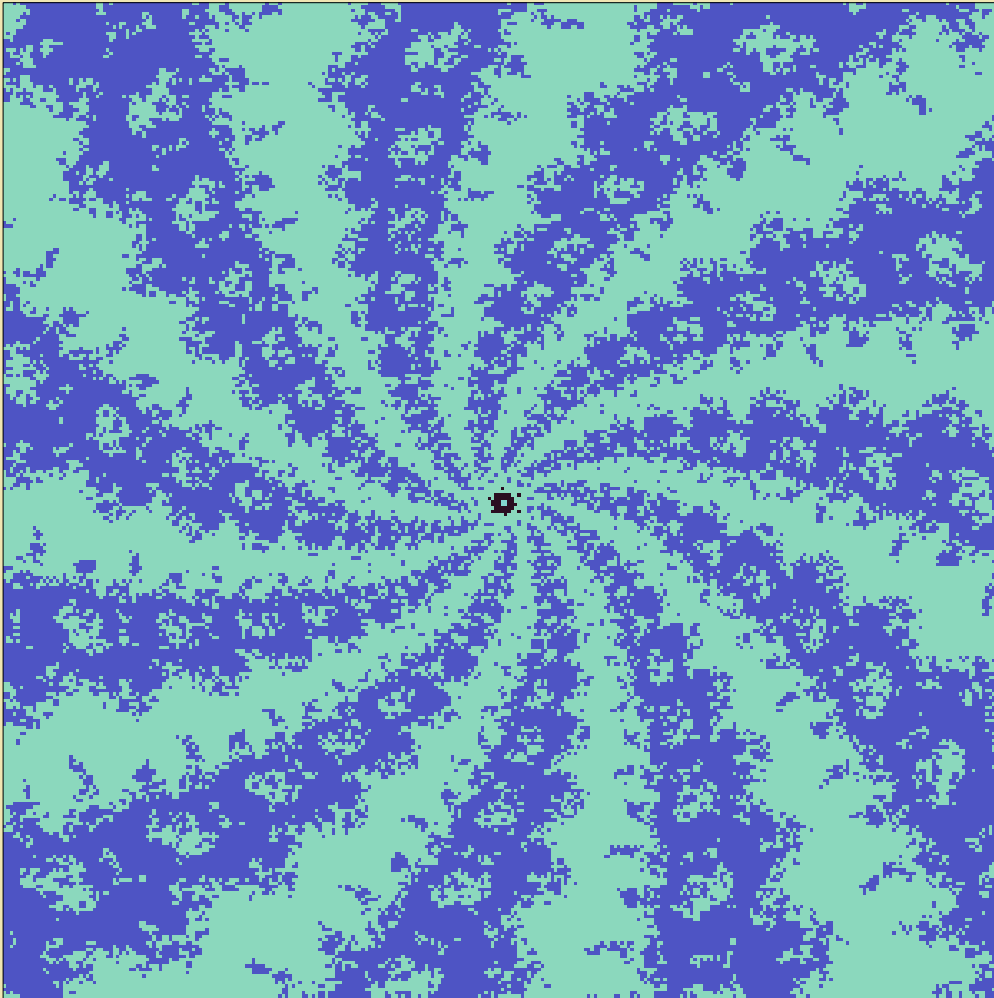
$$\left(\begin{array}{l} i = \left[\frac{ax + by + e}{\omega} \right] \\ j = \left[\frac{cx + dy + f}{\omega} \right] \end{array} \right)$$

Pour continuer l'étude des pavages on peut s'intéresser au pavés d'ordre 1 à n dans les cas suivants :

- Pavage dans le cas réduit
- Pavage dans le cas déterminantal
- Pavage dans le cas général

On peut en déduire une multitude de propriétés telles que la périodicité ou le voisinage d'un pavé.

Dynamique d'une AQA



On étudie le comportement itératif, de ces quantifications affines.

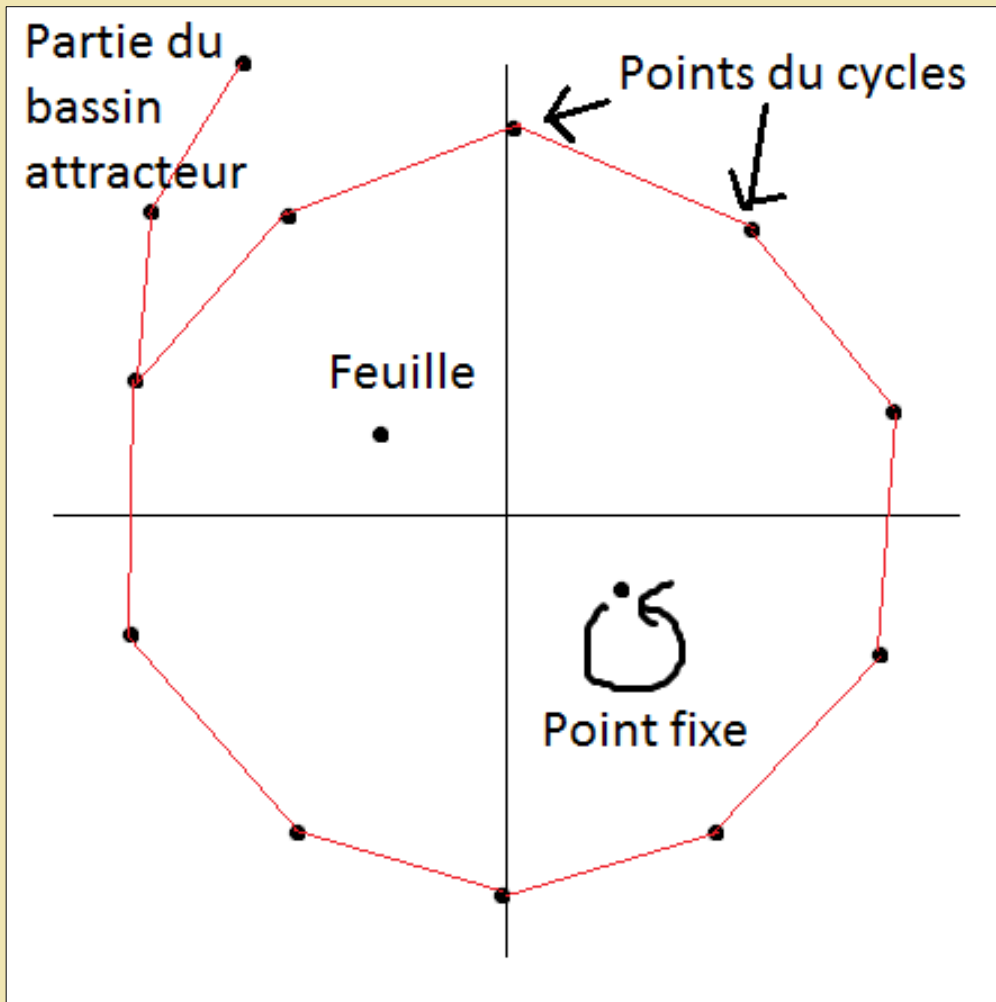
Soit $[g]$ l'AQA et soit X un point de Z^2 , on étudie le comportement des suites où n entier positif:

$$[g]^n(X)$$

Une application affine est contractante d'un facteur $0 < s < 1$ si pour tout vecteur (x,y) on a :

$$\|f(x) - f(y)\| = s \|x - y\|$$

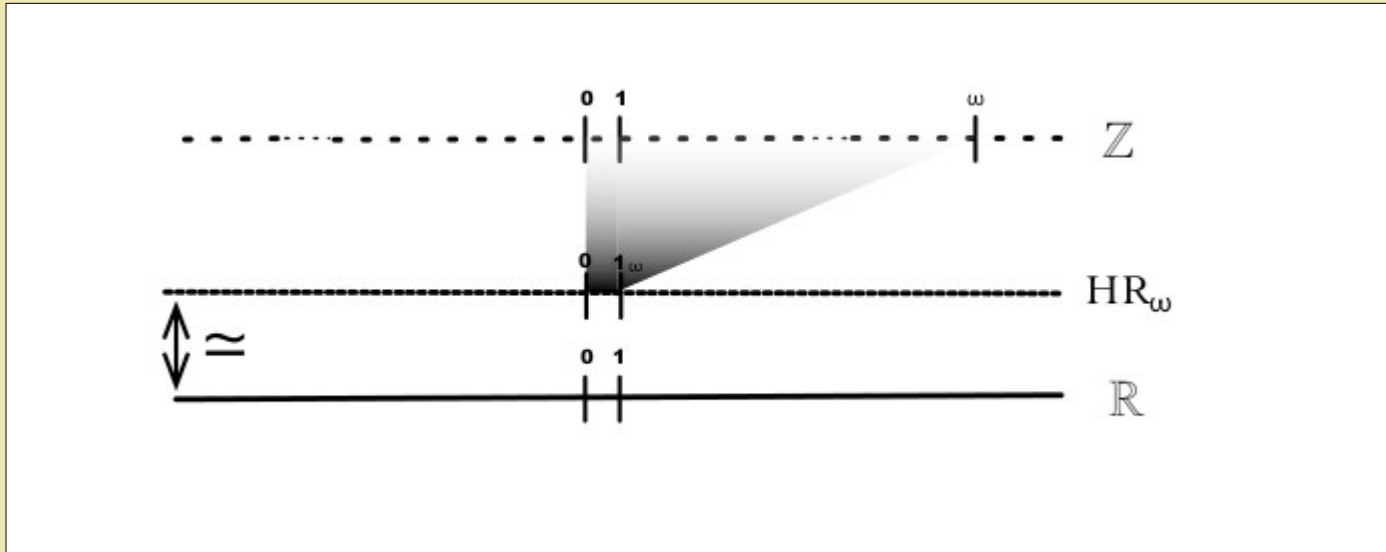
Dynamique d'une AQA



Une application quasi-affine contractante est définie comme la partie entière d'une application affine contractante.

Pour continuer l'étude de la dynamiques des AQAs on peut s'intéresser à la localisation des cycles ou aux critères de connexités

La droite d'Harthong-Reeb



- Une structure numérique définie à partir des nombres entiers
- Modèle discret du continu
- ω entier tel que $\omega \neq +\infty$
- Basé sur deux versions de l'arithmétique non- standard

Formalisation Ω -AQA

Par exemple $\theta = \pi/3$:

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right) \rightarrow \left\{ \begin{matrix} x' = \left[\frac{ax + by + e}{\omega} \right] \\ y' = \left[\frac{cx + dy + f}{\omega} \right] \end{matrix} \right\}$$

Calcul de la représentation au rang $n = 100$ avec SAGE

$$\left(\begin{array}{cc} 633825300114114700748351602688 & -1097817622920238380819884895108 \\ 1097817622920238380819884895107 & 633825300114114700748351602688 \end{array} \right)$$

$$\omega_{100} = 2^{100} = 1267650600228229401496703205376$$

$$\frac{109781762292023838081988489510}{1267650600228229401496703205376} \approx \sin(\pi/3)$$

Application existante

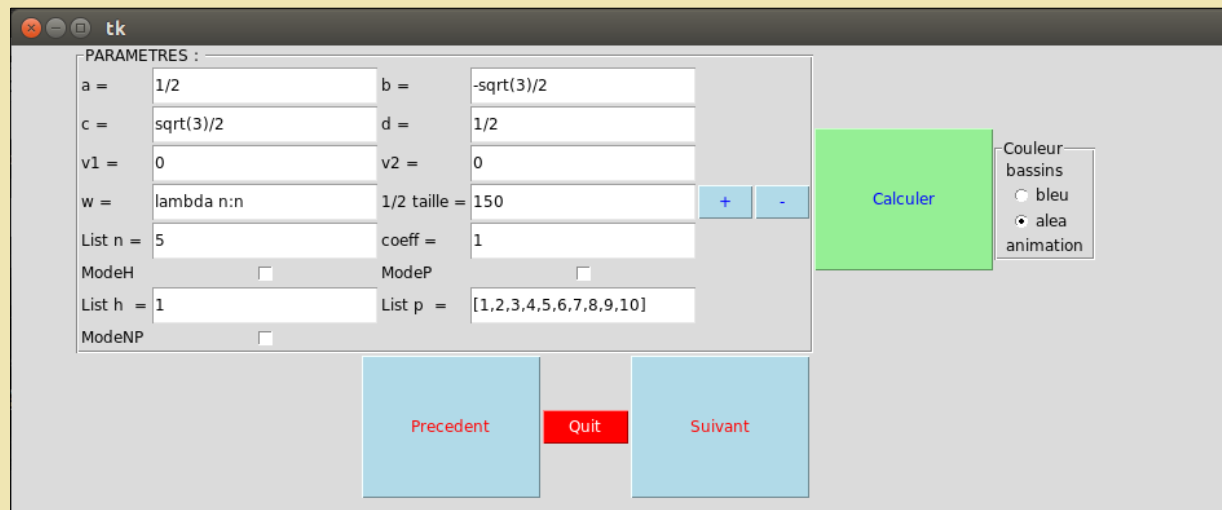
- Transformation des applications affines en Ω -AQA
- Affichage des bassins selon le rang de ω et l'AQA
- Affichage d'un superpavé selon le rang de ω et l'AQA
- Sauvegarde de toutes les images créées

Mes résultats

- Utilisateur
- AQA bassins
- AQA pavés

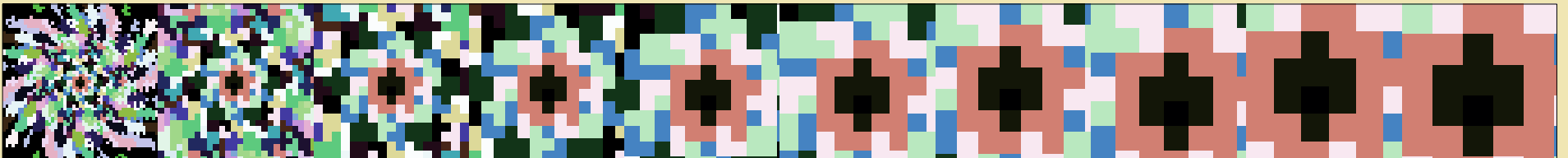
Mes résultats : Utilisateur

- Création d'un mode animé au format panorama et gif
- Création de fichiers .txt permettant de faire des statistiques
- Affichage de bassins itératif avec un dégradé de saturation
- Sauvegarde des bibliothèques de couleurs et des images sous forme de matrice pour une reconstruction ultérieure
- Rédaction d'une documentation utilisateur et de commentaires pour une programmation ultérieure



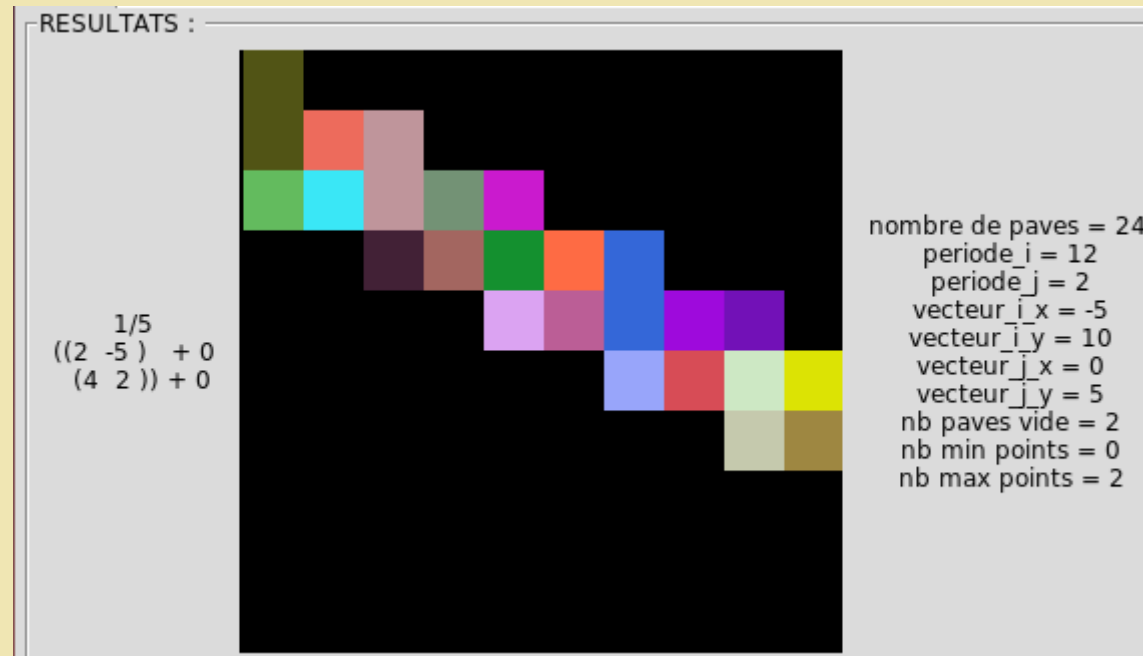
Mes résultats : AQA Bassins

- Rajout de plusieurs modes expérimentaux
 - Variation de l'échelle inter-pixels
 - Variation de la taille des pixels
- Etude du nombre de bassins selon ces modes et le rang
 - Convergence plus rapide selon la résolution (linéaire ou $\omega = \beta^2$)
- Etude du nombre et de la longueur des cycles des bassins selon leur rang



Mes résultats : AQA Pavés

- Etude du nombre de pavés vides et du nombre de points par pavés selon le rang
 - Pavés vides = Pavés avec 2 points
 - Pavés ont une variation de points très faible



Conclusion

- Notions théoriques sur les Ω -AQAs
- Mise en œuvre au sein d'une application
- Etudes expérimentales et conjectures
- Apprentissage de python et de sage
- Collaboration avec des chercheurs

Perspectives

- Formaliser en mathématiques les résultats observés (propriétés et critères)
- Prouver ces résultats à l'aide de l'assistant de preuves Coq à partir d'un socle déjà existant
- Publications et diffusion des résultats

Références

- [1]** E. Andres, M. Jacob-Da Col. Géométrie discrète et images numériques, Livre, Chapitre 7 : transformations affines discrètes, 2007.
- [2]** M. Jacob-Da Col. Applications quasi-affines. Thèse, Université Strasbourg, 1993.
- [3]** A. Chollet. Formalismes non classiques pour le traitement informatique de la topologie et de la géométrie discrète. Thèse, Université de la Rochelle, 2010.
- [4]** M. Jacob-Da Col, P. Tellier. Quasi-linear transformations and discrete tilings. Publication, Elsevier, 2009
- [5]** M. Jacob-Da Col. Applications quasi-affines et pavages du plan discret. Publication, Elsevier, 1999.
- [6]** A. Chollet, L. Fuchs. La Ω -droite d'Harthong-Reeb. Publication, 2012.