

# Transformation affine d'image avec précision arbitraire

**Thématiques : Géométrie discrète et preuves formelles**

*Sujet de stage de niveau master (printemps 2021)*

## Laboratoire d'accueil

ICube (UMR 7357) CNRS-Univ. de Strasbourg <http://icube.unistra.fr>  
Boulevard Sébastien Brant, BP 10413, 67412 Illkirch Cedex

## Encadrement

Nicolas Magaud ([magaud@unistra.fr](mailto:magaud@unistra.fr)), bur. C109, tel : 03 68 85 44 66, équipe IGG, ICube  
Marie-Andrée Da Col ([dacolm@unistra.fr](mailto:dacolm@unistra.fr)), bur. C226, tel : 06 86 08 00 85, équipe MIV, ICube  
Loïc Mazo ([mazo@unistra.fr](mailto:mazo@unistra.fr)), bur. C219, tel : 03 68 85 44 96, équipe MIV, ICube

**Mots-clefs :** Géométrie discrète, Transformation affine discrète, Sage, Python, preuves formelles, Coq

## Présentation

L'utilisation de transformations affines ou linéaires – les rotations, symétries, homothéties, transvections, etc. – est une opération courante en traitement d'image. Ces transformations sont associées à des matrices à coefficients réels. Parce que les nombres flottants ne peuvent pas coder les nombres réels, mais seulement un nombre fini de rationnels, les implantations des transformations affines ont le plus souvent des propriétés algébriques (bijectivité, ...), topologiques (connexité, ...) et géométriques (conservation de la distance, ...) différentes des transformations qu'elles sont sensées représenter.

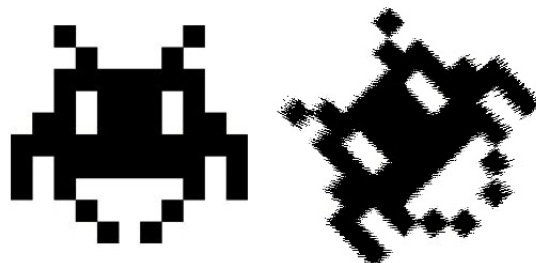


FIGURE 1 – Exemple de transformation discrète (ici une rotation) d'une image

Les applications quasi-affines (souvent abrégées AQA) [CBC09] sont les équivalents discrétisés des applications affines. Elles permettent de représenter, par des matrices à coefficients rationnels, des transformations affines ou linéaires, comme par exemple des rotations discrètes [NKPT13] (telles que celle présentée dans la Figure 1).

Une  $\Omega$ -AQA [ACF<sup>+</sup>14] peut être vue comme une suite de ces applications quasi-affines dont les coefficients (rationnels) se rapprochent de plus en plus de l'application réelle. Cette représentation permet à la fois de gérer l'aspect discret de l'espace considéré et de faire du calcul exact en se basant sur un modèle discret du continu utilisant uniquement des entiers : la droite d'Harthong-Reeb [CWF<sup>+</sup>12, MCF14].

Durant ce stage, on cherchera d'abord à établir les propriétés mathématiques des  $\Omega$ -AQA et de leur implantation. On modélisera ensuite à l'aide du système d'aide à la preuve Coq [Coq14, BC04] ces applications et on en démontrera formellement les propriétés de base.

Plusieurs algorithmes basées sur les  $\Omega$ -AQA et implantant des transformations d'image numérique sont en cours de développement en Python/Sage. Une première étape consistera à les manipuler afin de conjecturer certaines propriétés de ces transformations à base d' $\Omega$ -AQA, notamment vis-à-vis de la transformation réelle de référence. Il s'agira alors de décrire les algorithmes utilisés en Coq et d'en prouver formellement les propriétés.

Si le temps le permet, on pourra également étudier l'extension à la 3D de ces algorithmes et éventuellement énoncer et prouver les propriétés associées.

## Références

- [AC07] Eric Andrès and Marie-Andrée Jacob-Da Col. Transformations affines discrètes. In David Coeurjolly, Annick Montanvert, and Jean-Marc Chassery, editors, *Traité IC2-Hermès : Géométrie discrète et images numériques*, chapter 7, pages 169–186. Hermès, 2007.
- [ACF<sup>+</sup>14] Eric Andrès, Marie-Andrée Da Col, Laurent Fuchs, Gaëlle Largeteau-Skapin, Nicolas Magaud, Loïc Mazo, and Rita Zrour. Les  $\Omega$ -AQA : Représentation discrète des applications affines. In *Journées du groupe de travail Géométrie Discrète*, pages –, 2014. Reims Image 2014.
- [BC04] Yves Bertot and Pierre Castéran. *Interactive Theorem Proving and Program Development, Coq'Art : The Calculus of Inductive Constructions*. Springer, 2004.
- [CBC09] David Coeurjolly, Valentin Blot, and Marie-Andrée Jacob-Da Col. Quasi-Affine Transformation in 3-D : Theory and Algorithms. In Petra Wiederhold and Reneta P. Barneva, editors, *IWCIA*, volume 5852 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 68–81. Springer, 2009.
- [Coq14] Coq development team. *The Coq Proof Assistant Reference Manual, Version 8.4.pl4*. INRIA, 2014.
- [CWF<sup>+</sup>12] Agathe Chollet, Guy Wallet, Laurent Fuchs, Eric Andres, and Gaëlle Largeteau-Skapin. Foundational Aspects of Multiscale Digitization. *Theor. Comput. Sci.*, 466 :2–19, 2012.
- [MCF14] Nicolas Magaud, Agathe Chollet, and Laurent Fuchs. Formalizing a Discrete Model of the Continuum in Coq from a Discrete Geometry Perspective. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, 2014. Accepted. To appear.
- [NKPT13] Phuc Ngo, Yukiko Kenmochi, Nicolas Passat, and Hugues Talbot. Combinatorial structure of rigid transformations in 2D digital images. *Computer Vision and Image Understanding*, 117(4) :393–408, 2013.

## Compétences requises

Ce sujet nécessite un bon niveau en programmation (Python, Ocaml, Sage) ainsi que de bonnes bases en mathématiques. Des connaissances en géométrie discrète ou en preuves formelles (Coq) seraient un plus.